Florian Wickelmaier
Forschungsmethoden und Mathematische Psychologie
Fachbereich Psychologie
Universität Tübingen

Vorlesung Statistik II
SS 2026

Übungsaufgaben

Aufgabe 35. Aus einem Experiment zur Unterscheidbarkeit der Tonhöhe von Sinustönen nach der Konstanzmethode resultiert für einen Standardreiz $s = 440$ Hz und $n = 30$ Darbietungen jedes der Vergleichsreize x_i die nachfolgend aufgelistete Anzahl der Fälle y_i, in denen x_i als höher als s beurteilt wird:

	Vergleichsreize						
i	1	2	3	4	5	6	7
x_i [Hz]	438.5	439	439.5	440	440.5	441	441.5
y_i	3	10	17	14	20	27	28

a) Schätzen Sie im Rahmen einer logistischen Regression die Parameter c und d der logistischen psychometrischen Funktion

$$p(x_i, s) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x_i - c}{d}\right)}$$

mit Hilfe der R-Funktion `glm()`.

b) Überprüfen Sie die Hypothese, dass die logistische psychometrische Funktion die Daten adäquat beschreibt. Vergleichen Sie hierzu die empirisch beobachteten mit den erwarteten Häufigkeiten anhand eines χ^2-Anpassungstests mit $\alpha = 0.1$. Dies erfordert folgende Schritte:

(a) Berechnen Sie für jeden Vergleichsreiz x_i $(i = 1, \ldots, 7)$ einen entsprechenden Wert χ_i^2 der zugehörigen Binomialverteilung. Die Größen χ_i^2 sind jeweils Chi-Quadrat-verteilt mit einem Freiheitsgrad $df = 1$.

(b) Für einen globalen Test können diese Chi-Quadrat-Werte aufaddiert werden. Die Summe

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \chi_i^2$$

ist dann ebenfalls Chi-Quadrat-verteilt, wobei die Anzahl der Freiheitsgrade die Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Summanden ist. Für den Anpassungstest ist die Anzahl der Freiheitsgrade nun noch um die Anzahl der geschätzten freien Parameter zu vermindern.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit R. Hinweis: Verwenden Sie `predict(..., type = "response")` zur Bestimmung der erwarteten Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 36. (Hays, 1994, S. 419, Exercise 12) Vier Gruppen von Ratten wurden in einem komplexen Labyrinth beobachtet. Jede Ratte hatte 10 Versuche. Für die erste Gruppe enthielt das Labyrinth visuelle Hinweise auf den korrekten Weg, bei der zweiten Gruppe olfaktorische Hinweisreize. Die dritte Gruppe hatte beide Arten von Hinweisreizen zur Verfügung, während die vierte Gruppe keinen davon erhielt. Je sechs Ratten wurden zufällig einer der Gruppen zugewiesen, jedoch lieferte eine unterschiedliche Zahl von Ratten in den einzelnen Gruppen verwertbare Daten. Die folgende Tabelle zeigt die mittele Zeit in Minuten, die für den Weg durch das Labyrinth benötigt wurde.

Gruppe	mittlere Zeit [min]					
1	1.5	2.3	1.9	1.8		
2	1.7	2.1	1.8	1.9	1.3	1.6
3	1.4	1.1	1.7			
4	1.5	1.3	1.9	1.8	1.7	

Gehen Sie folgendermaßen vor, um die Frage zu klären, ob sich die Ergebnisse unter den verschiedenen Versuchsbedingungen unterscheiden:

a) Schätzen Sie den globalen Erwartungswert μ, sowie die Erwartungswerte μ_i und Varianzen σ_i^2 in den einzelnen Gruppen.

b) Berechnen Sie Schätzungen $\hat{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, der Effekte der einzelnen Gruppen.

c) Geben Sie die Dekomposition $y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\varepsilon}_{ij}$ für je zwei Fälle in jeder Gruppe explizit an.

d) Berechnen Sie die Summen der Abweichungsquadrate SS_B zwischen den Gruppen und SS_W innerhalb der Gruppen. (Hinweis: Nutzen Sie hierzu die Ergebnisse von Teilaufgabe a.)

e) Zeigen Sie rechnerisch, dass gilt $SS_B = \sum_{i=1}^{4} n_i \, \hat{\alpha}_i^2$

f) Berechnen Sie die Teststatistik und führen Sie den statistischen Test für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ durch.

Führen Sie alle Berechnungen von Hand durch und überprüfen Sie diese durch Verwendung der entsprechenden Funktionen in R.

g) Planen Sie ein neues Experiment. Bestimmen Sie per Simulation, wieviele Ratten pro Gruppe nötig sind, um die obige Nullhypothese in ca. 80% der Fälle abzulehnen unter der Annahme $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\mu_3 = 1.4$, $\mu_4 = 1.8$ und $\sigma = 0.5$.