Florian Wickelmaier
Forschungsmethoden und Mathematische Psychologie
Fachbereich Psychologie
Universität Tübingen

Vorlesung Statistik II
SS 2026

Übungsaufgaben

Aufgabe 20. Die Darbietung einer Reizsituation (x, s) bestehend aus einem Vergleichsreiz x und einem Standardreiz s im Rahmen der Fechnerschen Konstanzmethode kann als Bernoulli-Experiment betrachtet werden. Zur Schätzung der Wahrscheinlichkeit p einer "Ja"-Antwort auf die Frage, ob der Vergleichsreiz empfindungsmäßig intensiver als der Standardreiz ist, wird die Reizsituation n-fach wiederholt dargeboten. Für die i-te Wiederholung nimmt die Zufallsvariable X_i den Wert 1 an, wenn die Versuchsperson mit "Ja" antwortet, und 0 sonst. Als Schätzfunktion für p wird die relative Häufigkeit

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

verwendet. Für den Vergleichsreiz x werde durch eine psychometrische Funktion der Wert $p = 0.6$ vorhergesagt. Um diese Vorhersage statistisch zu testen, werde die Reizsituation der Versuchsperson 10-mal dargeboten.

a) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für einen zweiseitigen Test der Nullhypothese $p = p_0 = 0.6$ mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.1$. (Hinweis: Die relevante Binomialverteilung lässt sich in R durch `dbinom(0:10, 10, prob = 0.6)` berechnen.)

b) Welche Irrtumswahrscheinlichkeit α' benutzt dieser exakte Binomialtest tatsächlich?

c) Was bedeutet das für die Testentscheidung im Vergleich zu einem Test auf dem Niveau $\alpha = 0.1$?

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit β des Fehlers zweiter Art unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit p tatsächlich den Wert $p_1 = 0.5$ bzw. $p_1 = 0.7$ annimmt.

e) Wie groß kann die Wahrscheinlichkeit β des Fehlers zweiter Art maximal werden?

Aufgabe 21. Eine Brauerei produziert ein neues alkoholfreies Bier. Es wird ein Geschmackstest geplant. Dabei sollen 150 Personen je ein Glas alkoholfreies bzw. gewöhnliches Bier erhalten und versuchen, das alkoholfreie Bier zu identifizieren. Es soll die Hypothese getestet werden, alkoholfreies und gewöhnliches Bier seien geschmacklich nicht zu unterscheiden.

a) Bestimmen Sie per Simulation die approximative Größe der Abweichung von $p = 0.5$, die mit dem veranschlagten Stichprobenumfang, $\alpha = 0.10$ und $\beta = 0.20$ gezeigt werden kann.

b) Der Geschmackstest wurde wie geplant durchgeführt: 98 Personen gelang die Identifizierung des alkoholfreien Bieres. Testen Sie die obige Hypothese ($\alpha = 0.10$).

c) Unter den befragten Personen waren 15 Beschäftigte der Brauerei. Von diesen gelingt 9 die richtige Identifizierung. Überprüfen Sie die Hypothese für diese Subpopulation mit einem exakten Testverfahren ($\alpha = 0.10$).

Führen Sie die für b) und c) erforderlichen Berechnungen von Hand durch. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit den Funktionen `prop.test()` und `binom.test()` in R.

Aufgabe 22. Die Gesamt-IQ-Werte des Hamburg-Wechsler-Intelligenztests für Erwachsene (HAWIE) sind in guter Näherung normalverteilt mit $\sigma = 15$. Bei einer Zufallsstichprobe von $n = 25$ Studierenden wird jeweils der Gesamt-IQ ermittelt. Es wird folgende einseitige Nullhypothese formuliert:

H_0: Studierende besitzen im Mittel einen HAWIE-Gesamt-IQ von mindestens 115.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0.05$.

a) Wie lautet die Alternativhypothese?

b) Erläutern Sie mit speziellem Bezug auf die angegebene Nullhypothese, was man unter einem Fehler erster bzw. zweiter Art versteht.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art, wenn der wahre Gesamt-IQ von Studenten im Mittel $\mu_1 = 117$ beträgt (Ergebnis: 0.0104).

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für eine richtige Entscheidung, wenn der wahre Gesamt-IQ von Studenten im Mittel $\mu_2 = 112$ bzw. $\mu_3 = 108$ beträgt.

Aufgabe 23. Bei empirischen Untersuchungen im Jahr 1950 wurde festgestellt, dass das Merkmal X "Körpergröße von 6-jährigen Kindern" approximativ normalverteilt ist mit $\mu = 115\,\text{cm}$ und $\sigma = 6\,\text{cm}$. Es soll geprüft werden, ob sich die mittlere Körpergröße im Vergleich zu damals verändert hat.

a) Bestimmen Sie durch Simulation den Stichprobenumfang, mit dem eine Veränderung von 3 cm mit ca. 80% Power bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ nachgewiesen werden kann. Gehen Sie bei der Simulation von unveränderter Varianz aus, beim Test jedoch von unbekannter Varianz.

b) Bei einer Stichprobe von $n = 26$ zufällig ausgewählten 6-jährigen Kindern wurde wieder dieses Merkmal untersucht. Es ergab sich ein Mittelwert von $\bar{x} = 118$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 5.1^2$. Testen Sie die obige Hypothese ($\alpha = 0.05$).

c) Welche Konsequenzen für die Interpretation des Tests hat die Tatsache, dass der tatsächlich verwendete Stichprobenumfang ($n = 26$) kleiner ist als der per Simulation bestimmte?