Florian Wickelmaier
Forschungsmethoden und Mathematische Psychologie
Fachbereich Psychologie
Universität Tübingen

Vorlesung Statistik II
SS 2026

Übungsaufgaben

Aufgabe 12. Im Schreibbüro einer Firma sind drei Personen tätig. Person A arbeitet nicht sehr genau und macht im Schnitt einen Rechtschreibfehler in jedem Brief. Person B ist etwas besser, bringt es aber immer noch auf durchschnittlich drei Fehler in fünf Briefen. Person C ist eine Spitzenkraft und macht im Mittel in zehn Briefen nur einen Fehler. Der Chef liest fünf Briefe, die alle von derselben Person geschrieben wurden, und entdeckt zwei Fehler. Nehmen Sie an, dass die Anzahl der in den fünf Briefen auftretenden Fehler einer Poisson-Verteilung folgt.

a) Wer hat die Briefe vermutlich geschrieben? Betrachten Sie zur Beantwortung dieser Frage die Likelihood der einzelnen Beobachtungen unter der Annahme, dass jeweils eine Poisson-Verteilung mit einem durch die obigen Angaben bestimmten individuellen Parameter zugrunde liegt.

b) Welchen Parameterwert würde man unter Verwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips für die Person schätzen, welche die Briefe geschrieben hat? (Hinweis: Als Ableitung der Log-Likelihood nach dem Parameter λ erhält man für den betrachteten Fall $\frac{2}{\lambda} - 1$.)

c) Da Person C ganztags beschäftigt ist, die Personen A und B aber nur halbtags, ist die A-priori-Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Briefe von Person C geschrieben wurden doppelt so groß, wie die für die Personen A und B. Welche A-posteriori-Verteilung ergibt sich, wenn die A-priori-Verteilung $P(C) = 1/2$ und $P(A) = P(B) = 1/4$ in die Schätzung mit einbezogen wird? Für welche Person ergibt sich der Modalwert der A-posteriori-Verteilung.

Aufgabe 13. Ein Intelligenztest für sehbehinderte Kinder sei so konstruiert worden, dass die resultierenden Werte normalverteilt sind mit Erwartungswert $\mu_0 = 106$ und Standardabweichung $\sigma_0 = 12$. Für eine Stichprobe von $n = 725$ nicht sehbehinderten Kindern ergebe sich für diesen Test ein Mittelwert von $\bar{x} = 104.6$. Gehen Sie für die folgenden Berechnungen davon aus, dass die resultierenden Werte in beiden Populationen in hinreichender Näherung als normalverteilt mit identischen Varianzen betrachtet werden können.

a) Bestimmen Sie für den Erwartungswert μ in der Population der nicht sehbehinderten Kinder das Konfidenzintervall zum Niveau 0.99.

b) Was lässt sich über die beiden Erwartungswerte μ_0 und μ aussagen?

c) Nehmen Sie an, für die nicht sehbehinderten Kinder gelte tatsächlich $\mu = 105$. Simulieren Sie, wie ab Folie 189 beschrieben, 100 Konfidenzintervalle und stellen diese grafisch dar. Zeichnen Sie μ_0 und μ in das Schaubild ein. Was lässt sich über die Verzerrung der Abweichung von $\mu_0 - \mu = 1$ sagen?

Aufgabe 14. Ein Statistiker konstruiert 20 unabhängige Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 0.95. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle Konfidenzintervalle

b) die Hälfte der Konfidenzintervalle

c) genau 19 Konfidenzintervalle

den Wert des unterliegenden Parameters überdecken?

Aufgabe 15. Ein Intelligenztest sei so konstruiert worden, dass die resultierenden Werte normalverteilt sind. In einer Stichprobe von 1000 Personen ergibt sich der Mittelwert $\bar{x} = 98.8$ und eine Stichprobenvarianz von $s^2 = 221.3$.

a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für den Erwartungswert μ in der Grundgesamtheit.

b) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für die Varianz σ^2 in der Grundgesamtheit.

c) Kann auf diesem Konfidenzniveau davon ausgegangen werden, dass der Test den Erwartungswert $\mu_0 = 100$ und die Standardabweichung $\sigma_0 = 15$ besitzt?

Bestimmen Sie die relevanten Quantile aus einer entsprechenden Tabelle und durch Benutzung von R (Konsultieren Sie gegebenenfalls die Hilfe bezüglich der für die Funktionen `qnorm()`, `qt()` bzw. `qchisq()` erforderlichen Optionen).

Aufgabe 16. Ein Meinungsforscher plant zur Erstellung einer Wahlprognose eine Befragung, bei der er die mit dem Überspringen der 5%-Hürde verbundene Frage des Einzugs in das Parlament besonders genau erfassen will. Für einen geschätzten Stimmenanteil von 5.2% möchte er bei einem Konfidenzniveau von 0.95 ein einseitiges Konfidenzintervall mit einer unteren Grenze größer gleich 5.0% erhalten. Wie groß muss die Anzahl der Befragten mindestens sein, um das zu erreichen?