Florian Wickelmaier
Forschungsmethoden und Mathematische Psychologie
Fachbereich Psychologie
Universität Tübingen

Vorlesung Statistik II
SS 2026

Übungsaufgaben

Aufgabe 7. Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 50$ und Varianz $\sigma^2 = 100$. Betrachten Sie für jeden der beiden Werte $\varepsilon = 5$ und $\varepsilon = 15$ jeweils die Wahrscheinlichkeit

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon),$$

dass die (absolute) Abweichung der Zufallsvariable vom Erwartungswert mindestens ε beträgt.

a) Schätzen Sie die jeweilige Wahrscheinlichkeit ohne Verwendung der Verteilungsannahme über die *Tschebyschowsche Ungleichung* ab.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten exakt unter Verwendung der Verteilungsannahme. Sie können hierzu eine Tabelle der Standardnormalverteilung konsultieren oder R benutzen. (Hinweis: Für Informationen zur Funktion `pnorm()` geben Sie in der R-Konsole `?pnorm` ein.)

c) Schätzen Sie die jeweilige Wahrscheinlichkeit durch Simulation in R für eine Stichprobengröße von $n = 20$. Ziehen Sie dazu eine n-Stichprobe aus der Normalverteilung und bestimmen Sie den Anteil der Fälle, bei denen die absolute Abweichung von μ mindestens ε beträgt. Wiederholen Sie das Zufallsexperiment 2000mal, um die Unsicherheit der Schätzung zu charakterisieren.

d) Was kann man aus diesen Ergebnissen über die Güte der Abschätzung durch die Tschebyschowsche Ungleichung ableiten?

Aufgabe 8. Ein Psychologe ermittelt für 5 zufällig ausgewählte Personen den IQ mittels eines Intelligenztests, von dem angenommen wird, dass die resultierenden Werte normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 100$ und Varianz $\sigma^2 = 15^2$ sind. Er erhält die Werte $101, 127, 81, 107, 90$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer erneuten Ziehung einer Stichprobe von 5 Personen einen Mittelwert der IQs zu erhalten, der mindestens so groß ist, wie der Mittelwert der vorliegenden Stichprobe?

b) Wie verändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn der Stichprobenumfang auf $n = 20$ vervierfacht wird?

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten mit einer Verteilungstabelle und mit R. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten durch Simulation in R, indem Sie die Stichprobenziehung je 2000mal wiederholen.

Aufgabe 9. Die Darbietung einer Reizsituation (x, s) bestehend aus einem Vergleichsreiz x und einem Standardreiz s im Rahmen der Fechnerschen Konstanzmethode kann als Bernoulli-Experiment betrachtet werden. Zur Schätzung der Wahrscheinlichkeit p einer "Ja"-Antwort auf die Frage, ob der Vergleichsreiz empfindungsmäßig intensiver als der Standardreiz ist, wird die Reizsituation n-fach wiederholt dargeboten. Für die i-te Wiederholung nimmt die Zufallsvariable X_i den Wert 1 an, wenn die Versuchsperson mit "Ja" antwortet, und 0 sonst. Als Schätzfunktion für p wird die relative Häufigkeit

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

verwendet.

a) Bestimmen Sie die mittlere quadratische Abweichung $MSE(\bar{X})$ der relativen Häufigkeit. (Hinweis: In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass $\bar{X}$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Wahrscheinlichkeit p ist.)

b) Skizzieren Sie die Abhängigkeit der mittleren quadratischen Abweichung $MSE(\bar{X})$ vom Parameter p, indem Sie diese für die x_p-Vergleichsreize mit

$$p = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$$

und $n = 20$ berechnen. (Hinweis: In R können Sie eine Grafik erstellen mit dem Kommando `curve(expr, from = 0, to = 1, xname = "p")`, wobei für `expr` die Formel für die mittlere quadratische Abweichung $MSE(\bar{X})$ einzusetzen ist.)

c) Um welchen Faktor muss sich die Anzahl der Darbietungen des $x_{0.5}$-Vergleichsreizes von der des $x_{0.75}$-Vergleichsreizes unterscheiden, damit beide dieselbe mittlere quadratische Abweichung aufweisen?