Vorlesung Statistik II

Formelsammlung

Version 20.07.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Intervallschätzung **2**
- 1.1 Konfidenzintervalle für μ . . . 2
- 1.2 Konfidenzintervalle für σ^2, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . . . 2
- 1.3 Konfidenzintervalle für p, $X \sim B(1, p)$, $(n \cdot \bar{X} \cdot (1 - \bar{X}) > 9)$ . . . 2

2 Tests im Ein-Stichproben-Fall **2**
- 2.1 Binomialtest . . . 2
- 2.2 Ein-Stichproben-z- und t-Test . . . 3
- 2.3 Varianz-Test . . . 3
- 2.4 Vorzeichen- und Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest . . . 3
- 2.5 χ^2-Anpassungstest . . . 4

3 Tests im Zwei-Stichproben-Fall **4**
- 3.1 Unabhängige Stichproben . . . 4
  - 3.1.1 Zwei-Stichproben-z-, t- und Welch-Test . . . 4
  - 3.1.2 Vergleich zweier Varianzen . . . 5
  - 3.1.3 Wilcoxon-Rangsummentest . . . 5
- 3.2 Abhängige Stichproben . . . 5
  - 3.2.1 t-Test für abhängige Stichproben . . . 5
  - 3.2.2 Wilcoxon-Test für abhängige Stichproben . . . 6

4 Zusammenhangsanalyse **6**
- 4.1 χ^2-Homogenitätstest . . . 6
- 4.2 χ^2-Unabhängigkeitstest . . . 6
- 4.3 Test des Korrelationskoeffizienten . . . 7

5 Regression **7**
- 5.1 Einfache Regression . . . 7
- 5.2 Multiple Regression . . . 8

6 Varianzanalyse **8**
- 6.1 Einfaktorielle Varianzanalyse . . . 8
  - 6.1.1 Modell mit festen Effekten . . . 8
  - 6.1.2 Modell mit zufälligen Effekten . . . 9
- 6.2 Zweifaktorielle Varianzanalyse . . . 9
  - 6.2.1 Modell mit festen Effekten . . . 9
  - 6.2.2 Modell mit zufälligen Effekten . . . 9
- 6.3 Einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung . . . 10

7 Kovarianzanalyse **10**

1 Intervallschätzung

1.1 Konfidenzintervalle für μ

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bzw. X beliebig verteilt ($n > 30$)
(Approximatives) Zweiseitiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall

$$\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \qquad \sigma^2 \text{ bekannt}$$
$$\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot S/\sqrt{n} \qquad \sigma^2 \text{ unbekannt}$$

(Approximative) Einseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle

$$[\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n},\ \infty) \text{ und } (-\infty,\ \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}]\ \sigma^2 \text{ bekannt}$$
$$[\bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1) \cdot S/\sqrt{n},\ \infty) \text{ und } (-\infty,\ \bar{X} + t_{1-\alpha}(n-1) \cdot S/\sqrt{n}]\ \sigma^2 \text{ unbekannt}$$

1.2 Konfidenzintervalle für σ^2, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Zweiseitiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall

$$\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

Einseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle

$$\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)},\ \infty\right) \text{ und } \left(-\infty,\ \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right]$$

1.3 Konfidenzintervalle für p, $X \sim B(1,p)$, $(n \cdot \bar{X} \cdot (1-\bar{X}) > 9)$

Zweiseitiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall

$$\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}\,(1-\bar{X})}{n}}$$

Einseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\bar{X}\,(1-\bar{X})}{n}},\ \infty\right) \text{ und } \left(-\infty,\ \bar{X} + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\bar{X}\,(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

2 Tests im Ein-Stichproben-Fall

2.1 Binomialtest

Annahmen:
1. Exakter Test: $X_1, \ldots, X_n \sim B(1,p)$ i.i.d.
2. Approximativer Test: $X_1, \ldots, X_n \sim B(1,p)$ i.i.d., $n \geq 30$

Hypothesen:
a) $H_0\colon\ p = p_0 \quad H_1\colon\ p \neq p_0$
b) $H_0\colon\ p \geq p_0 \quad H_1\colon\ p < p_0$
c) $H_0\colon\ p \leq p_0 \quad H_1\colon\ p > p_0$

Teststatistik:
1. Exakter Test: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $T \sim B(n, p_0)$ für $p = p_0$
2. Approximativer Test: $Z = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0\,(1-p_0)}}\sqrt{n}$, $Z \overset{a}{\sim} N(0,1)$ für $p = p_0$

Ablehnungsbereich:
a) $T < b_{\alpha/2}$ oder $T > b_{1-\alpha/2}$ $\qquad |Z| > z_{1-\alpha/2}$
b) $T < b_{\alpha}$ $\qquad Z < z_{\alpha} = -z_{1-\alpha}$
c) $T > b_{1-\alpha}$ $\qquad Z > z_{1-\alpha}$

p-Quantil b_p der $B(n, p_0)$-Verteilung: $P(T \leq b_p - 1) < p \leq P(T \leq b_p)$

2.2 Ein-Stichproben-z- und t-Test

Annahmen:
1. Exakter z-Test: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d., σ^2 bekannt
2. Approximativer z-Test: $X_1, \ldots, X_n$ beliebig i.i.d., $n \geq 30$, σ^2 bekannt
3. Exakter t-Test: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d., σ^2 unbekannt
4. Approximativer t-Test: $X_1, \ldots, X_n$ beliebig i.i.d., $n \geq 30$, σ^2 unbekannt

Hypothesen:

a) $H_0\colon\ \mu = \mu_0 \quad H_1\colon\ \mu \neq \mu_0$
b) $H_0\colon\ \mu \geq \mu_0 \quad H_1\colon\ \mu < \mu_0$
c) $H_0\colon\ \mu \leq \mu_0 \quad H_1\colon\ \mu > \mu_0$

Teststatistik:
1., 2. $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, $Z \sim N(0,1)$ bzw. $Z \overset{a}{\sim} N(0,1)$ für $\mu = \mu_0$
3., 4. $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$, $T \sim t(n-1)$ bzw. $T \overset{a}{\sim} t(n-1)$ für $\mu = \mu_0$

Ablehnungsbereich:

a)	$\lvert Z\rvert > z_{1-\alpha/2}$	$\lvert T\rvert > t_{1-\alpha/2}(n-1)$
b)	$Z < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$	$T < t_\alpha(n-1) = -t_{1-\alpha}(n-1)$
c)	$Z > z_{1-\alpha}$	$T > t_{1-\alpha}(n-1)$

2.3 Varianz-Test

Annahmen: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d., σ^2 unbekannt

Hypothesen:

a) $H_0\colon\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1\colon\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
b) $H_0\colon\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad H_1\colon\ \sigma^2 < \sigma_0^2$
c) $H_0\colon\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad H_1\colon\ \sigma^2 > \sigma_0^2$

Teststatistik: $T = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$, $T \sim \chi^2(n-1)$ für $\sigma^2 = \sigma_0^2$

Ablehnungsbereich:

a) $T < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ oder $T > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
b) $T < \chi^2_\alpha(n-1)$
c) $T > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

2.4 Vorzeichen- und Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest

Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.
1. Vorzeichen-Test: stetige Verteilungsfunktion
2. Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest: stetige, symmetrische Verteilungsfunktion

Hypothesen:

a) $H_0\colon\ \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \quad H_1\colon\ \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$
b) $H_0\colon\ \tilde{\mu} \geq \tilde{\mu}_0 \quad H_1\colon\ \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$
c) $H_0\colon\ \tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_0 \quad H_1\colon\ \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$

Teststatistik, Verteilung für $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$:
1. $T =$ Anzahl der X_i mit $X_i < \tilde{\mu}_0$, $T \sim B(n, 0.5)$, $T \overset{a}{\sim} N(n/2, n/4)$ für $n \geq 25$
2.

$$W^+ = \sum_{i=1}^{n} rg|D_i| \cdot Z_i \text{ mit } Z_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } D_i > 0 \\ 0 & \text{wenn } D_i < 0 \end{cases}, \quad D_i = X_i - \tilde{\mu}_0$$

$$W^+ \sim \text{ Vorzeichen-Rangverteilung}, \quad W^+ \overset{a}{\sim} N\left(\tfrac{n(n+1)}{4}, \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right) \text{ für } n > 20$$

Ablehnungsbereich:

a)	$T < b_{\alpha/2}$ oder $T > b_{1-\alpha/2}$	$W^+ < w_{\alpha/2}(n)$ oder $W^+ > w_{1-\alpha/2}(n)$
b)	$T > b_{1-\alpha}$	$W^+ < w_\alpha(n)$
c)	$T < b_\alpha$	$W^+ > w_{1-\alpha}(n)$

p-Quantil b_p der $B(n, p_0)$-Verteilung: $P(T \leq b_p - 1) < p \leq P(T \leq b_p)$
p-Quantil $w_p(n)$ der Verteilung von W^+ bei Stichprobenumfang n

2.5 χ^2-Anpassungstest

Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ beliebig i.i.d. mit Wertevorrat $\{1, \ldots, r\}$; bei stetigem Merkmal Kategorisierung von X
Hypothesen:
H_0: $P(X_i = k) = p_k$ für alle $k = 1, \ldots, r$ $(i = 1, \ldots, n)$
H_1: $P(X_i = k) \neq p_k$ für mindestens ein $k = 1, \ldots, r$ $(i = 1, \ldots, n)$
Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(Y_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k}$ mit Y_k = Anzahl der X_i mit $X_i = k$
Verteilung unter H_0: $\chi^2 \overset{a}{\sim} \chi^2(r - m - 1)$ mit m zu schätzenden Parametern, falls
$n\,p_k \geq 1$ für alle $k = 1, \ldots, r$
$n\,p_k \geq 5$ für mindestens 80% der Fälle
Ablehnungsbereich: $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(r - m - 1)$

3 Tests im Zwei-Stichproben-Fall

3.1 Unabhängige Stichproben

3.1.1 Zwei-Stichproben-z-, t- und Welch-Test

Annahmen: beide Stichproben unabhängig
1. z-Test: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ i.i.d., $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ i.i.d., σ_x^2, σ_y^2 bekannt
2. t-Test: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ i.i.d., $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ i.i.d., $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ aber unbekannt
3. Welch-Test: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ i.i.d., $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ i.i.d., $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ und unbekannt
4. Approximativer t-Test: X, Y beliebig i.i.d., $n, m \geq 30$

Hypothesen:
a) H_0: $\mu_x - \mu_y = \delta_0$ H_1: $\mu_x - \mu_y \neq \delta_0$
b) H_0: $\mu_x - \mu_y \geq \delta_0$ H_1: $\mu_x - \mu_y < \delta_0$
c) H_0: $\mu_x - \mu_y \leq \delta_0$ H_1: $\mu_x - \mu_y > \delta_0$

Teststatistik, Verteilung für $\mu_x - \mu_y = \delta_0$:

$$1.\ Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}, \quad Z \sim N(0,1)$$

$$2.\ T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{(n-1)\,S_x^2 + (m-1)\,S_y^2}{n+m-2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}, \quad T \sim t(n+m-2)$$

$$3.,\ 4.\ T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}}, \quad T \sim t(k), \quad T \overset{a}{\sim} t(n+m-2)$$

Ablehnungsbereich:

a)	$\lvert Z\rvert > z_{1-\alpha/2}$	$\lvert T\rvert > t_{1-\alpha/2}(n+m-2)$	$\lvert T\rvert > t_{1-\alpha/2}(k)$
b)	$Z < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$	$T < t_\alpha(n+m-2) = -t_{1-\alpha}(n+m-2)$	$T < t_\alpha(k) = -t_{1-\alpha}(k)$
c)	$Z > z_{1-\alpha}$	$T > t_{1-\alpha}(n+m-2)$	$T > t_{1-\alpha}(k)$

$$k = (S_x^2/n + S_y^2/m)^2 \;/\; \left(\frac{1}{n-1} \left(\frac{S_x^2}{n}\right)^2 + \frac{1}{m-1} \left(\frac{S_y^2}{m}\right)^2 \right)$$

3.1.2 Vergleich zweier Varianzen

Annahmen: beide Stichproben unabhängig, $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ i.i.d., $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ i.i.d., σ_x^2, σ_y^2 unbekannt
Hypothesen:
a) $H_0\colon\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad H_1\colon\ \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$
b) $H_0\colon\ \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad H_1\colon\ \sigma_x^2 < \sigma_y^2$
c) $H_0\colon\ \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad H_1\colon\ \sigma_x^2 > \sigma_y^2$
Teststatistik: $T = \frac{S_x^2/\sigma_x^2}{S_y^2/\sigma_y^2}$, $T \sim F(n-1, m-1)$ für $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$
Ablehnungsbereich:
a) $T < f_{\alpha/2}(n-1, m-1)$ oder $T > f_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)$
b) $T < f_{\alpha}(n-1, m-1)$
c) $T > f_{1-\alpha}(n-1, m-1)$

3.1.3 Wilcoxon-Rangsummentest

Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$ je stetig i.i.d., beide Stichproben unabhängig
Hypothesen:
a) $H_0\colon\ \tilde{\mu}_x = \tilde{\mu}_y \quad H_1\colon\ \tilde{\mu}_x \neq \tilde{\mu}_y$
b) $H_0\colon\ \tilde{\mu}_x \geq \tilde{\mu}_y \quad H_1\colon\ \tilde{\mu}_x < \tilde{\mu}_y$
c) $H_0\colon\ \tilde{\mu}_x \leq \tilde{\mu}_y \quad H_1\colon\ \tilde{\mu}_x > \tilde{\mu}_y$
Teststatistik, Verteilung für $\tilde{\mu}_x = \tilde{\mu}_y$:

$$T_W = \sum_{i=1}^{n} rg(X_i)$$

$$T_W \sim \text{ Rangsummenverteilung}, \quad T_W \overset{a}{\sim} N\left(\tfrac{n(n+m+1)}{2}, \tfrac{nm(n+m+1)}{12}\right) \text{ für } n \text{ oder } m > 25$$

mit Rängen $rg(X_i)$ aus gepoolter Stichprobe $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$
Ablehnungsbereich:
1. $T_W < w_{\alpha/2}(n, m)$ oder $T_W > w_{1-\alpha/2}(n, m)$
2. $T_W < w_{\alpha}(n, m)$
3. $T_W > w_{1-\alpha}(n, m)$

p-Quantil $w_p(n, m)$ der Verteilung von T_W bei Stichprobenumfängen n, m

3.2 Abhängige Stichproben

3.2.1 t-Test für abhängige Stichproben

Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ Stichproben mit $D_1 = X_1 - Y_1, \ldots, D_n = X_n - Y_n \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$, σ_D^2 unbekannt

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - Y_i) - (\bar{X} - \bar{Y})\right)^2$$

Hypothesen:
a) $H_0\colon\ \mu_D = \delta_0 \quad H_1\colon\ \mu_D \neq \delta_0$
b) $H_0\colon\ \mu_D \geq \delta_0 \quad H_1\colon\ \mu_D < \delta_0$
c) $H_0\colon\ \mu_D \leq \delta_0 \quad H_1\colon\ \mu_D > \delta_0$
Teststatistik: $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{S_D}\sqrt{n}$, $T \sim t(n-1)$ für $\mu_D = \delta_0$
Ablehnungsbereich:
a) $|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$
b) $T < t_{\alpha}(n-1) = -t_{1-\alpha}(n-1)$
c) $T > t_{1-\alpha}(n-1)$

3.2.2 Wilcoxon-Test für abhängige Stichproben

Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ Stichproben mit $D_1 = X_1 - Y_1, \ldots, D_n = X_n - Y_n$ stetig, symmetrisch i.i.d.
Hypothesen:
a) $H_0\colon\ \tilde{\mu}_D = 0 \quad H_1\colon\ \tilde{\mu}_D \neq 0$
b) $H_0\colon\ \tilde{\mu}_D \geq 0 \quad H_1\colon\ \tilde{\mu}_D < 0$
c) $H_0\colon\ \tilde{\mu}_D \leq 0 \quad H_1\colon\ \tilde{\mu}_D > 0$
Teststatistik, Verteilung für $\tilde{\mu}_D = 0$:

$$W^+ = \sum_{i=1}^{n} rg|D_i| \cdot Z_i \text{ mit } Z_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } D_i > 0 \\ 0 & \text{wenn } D_i < 0 \end{cases}$$

$$W^+ \sim \text{ Vorzeichen-Rangverteilung}, \quad W^+ \overset{a}{\sim} N\left(\tfrac{n(n+1)}{4}, \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right) \text{ für } n > 20$$

Ablehnungsbereich:
a) $W^+ < w_{\alpha/2}(n)$ oder $W^+ > w_{1-\alpha/2}(n)$
b) $W^+ < w_{\alpha}(n)$
c) $W^+ > w_{1-\alpha}(n)$
p-Quantil $w_p(n)$ der Verteilung von W^+ bei Stichprobenumfang n

4 Zusammenhangsanalyse

4.1 χ^2-Homogenitätstest

Annahmen: $X_{j1}, \ldots, X_{jn_j}$ unabhängig, je identisch multinomialverteilt (Wertevorrat $\{1, \ldots, r\}$) für alle voneinander unabhängigen Stichproben $j = 1, \ldots, m$
Hypothesen:
H_0: $P(X_{ji} = k) = p_k$ für alle $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n_j$ und $k = 1, \ldots, r$
H_1: $P(X_{ji} = k) \neq P(X_{j'i} = k)$ für mindestens ein Paar $j \neq j'$ aus $\{1, \ldots, m\}$ und ein $k \in \{1, \ldots, r\}$
Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \frac{(Y_{jk} - n_j\, p_k)^2}{n_j\, p_k}$ mit Y_{jk} = Anzahl der X_{ji} mit $X_{ji} = k$ $(i = 1, \ldots, n_j)$
Verteilung unter H_0: $\chi^2 \overset{a}{\sim} \chi^2(m-1)(r-1)$, falls
$n_j\, p_k \geq 1$ für alle $k = 1, \ldots, r$
$n_j\, p_k \geq 5$ für mindestens 80% der Fälle
Ablehnungsbereich: $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(m-1)(r-1)$

4.2 χ^2-Unabhängigkeitstest

Annahmen: Unabhängige Paare (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, mit $X_i \in \{1, \ldots, m\}$ und $Y_i \in \{1, \ldots, r\}$
Hypothesen:
H_0: $P(X_i = j, Y_i = k) = P(X_i = j) \cdot P(Y_i = k)$ für alle j, k und $i = 1, \ldots, n$
H_1: $P(X_i = j, Y_i = k) \neq P(X_i = j) \cdot P(Y_i = k)$ für mindestens ein Paar j, k und $i = 1, \ldots, n$
Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \frac{(H_{jk} - n\, p_{j.}\, p_{.k})^2}{n\, p_{j.}\, p_{.k}}$ mit H_{jk} = Anzahl der Fälle mit $X_i = j$ und $Y_i = k$, sowie $p_{j.} = P(X_i = j)$, $p_{.k} = P(Y_i = k)$
Verteilung unter H_0: s. Homogenitätstest
Ablehnungsbereich: s. Homogenitätstest

4.3 Test des Korrelationskoeffizienten

Annahmen: (X_i, Y_i) unabhängig gemeinsam normalverteilt, $i = 1, \ldots, n$

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Hypothesen:
a) $H_0\colon\ \rho_{XY} = \rho_0 \quad H_1\colon\ \rho_{XY} \neq \rho_0$
b) $H_0\colon\ \rho_{XY} \geq \rho_0 \quad H_1\colon\ \rho_{XY} < \rho_0$
c) $H_0\colon\ \rho_{XY} \leq \rho_0 \quad H_1\colon\ \rho_{XY} > \rho_0$

Teststatistik, Verteilung für $\rho_{XY} = \rho_0$:
$\rho_0 = 0$: $T = \frac{r_{XY}}{\sqrt{1-r_{XY}^2}} \sqrt{n-2}$, $T \sim t(n-2)$
beliebiges ρ_0:

$$Z = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1 + r_{XY}}{1 - r_{XY}} - \log \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \right) \sqrt{n-3}, \quad Z \overset{a}{\sim} N(0,1) \text{ für } n > 25$$

Ablehnungsbereich:
a) $|T| > t_{1-\alpha/2}(n-2)$ $\quad |Z| > z_{1-\alpha/2}$
b) $T < -t_{1-\alpha}(n-2)$ $\quad Z < -z_{1-\alpha}$
a) $T > t_{1-\alpha}(n-2)$ $\quad Z > z_{1-\alpha}$

5 Regression

5.1 Einfache Regression

Modell:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Parameterschätzung:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\, \bar{X}, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, X_i)^2$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad Var(\hat{\beta}) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Konfidenzintervalle: $[\hat{\alpha} \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\, \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}]$, $[\hat{\beta} \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\, \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}]$
Hypothesen:
a) $H_0\colon\ \alpha = \alpha_0 \quad H_1\colon\ \alpha \neq \alpha_0$ bzw. $H_0\colon\ \beta = \beta_0 \quad H_1\colon\ \beta \neq \beta_0$
b) $H_0\colon\ \alpha \geq \alpha_0 \quad H_1\colon\ \alpha < \alpha_0$ $\quad H_0\colon\ \beta \geq \beta_0 \quad H_1\colon\ \beta < \beta_0$
c) $H_0\colon\ \alpha \leq \alpha_0 \quad H_1\colon\ \alpha > \alpha_0$ $\quad H_0\colon\ \beta \leq \beta_0 \quad H_1\colon\ \beta > \beta_0$

Teststatistiken:
$T_{\alpha_0} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}}$, $T_{\beta_0} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$ $\quad T \sim t(n-2)$ für $\alpha = \alpha_0$ bzw. $\beta = \beta_0$
Ablehnungsbereich:
a) $|T| > t_{1-\alpha/2}(n-2)$
b) $T < -t_{1-\alpha}(n-2)$
c) $T > t_{1-\alpha}(n-2)$

Prognose: $\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot x_0$

$$\hat{Y}_0 \pm \hat{\sigma} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{mit Prognosefehler}$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x \pm \hat{\sigma} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{ohne Prognosefehler}$$

5.2 Multiple Regression

Modell:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_{i1} + \ldots + \beta_p \cdot X_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Streuungszerlegung:
$SS_Y = SS_{\hat{Y}} + SS_{\hat{\varepsilon}}, \quad \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2, \quad R^2 = SS_{\hat{Y}}/SS_Y$
Hypothesen:
H_0: $\beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$
H_1: $\beta_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, p\}$
Teststatistik:
$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-p-1}{p} = \frac{SS_{\hat{Y}}/p}{SS_{\hat{\varepsilon}}/(n-p-1)}$
Ablehnungsbereich: $F > F_{1-\alpha}(p, n-p-1)$

6 Varianzanalyse

6.1 Einfaktorielle Varianzanalyse

6.1.1 Modell mit festen Effekten

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}$$

$i = 1, \ldots, m$ (Faktorstufe), $j = 1, \ldots, n_i$ (Beobachtung pro Stufe), $\sum_i n_i \alpha_i = 0$
Hypothesen:
H_0: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$
H_1: $\alpha_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, m\}$
Streuungszerlegung:

$$SS_T = SS_B + SS_W, \quad \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_i n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

mit $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j Y_{ij}$, $\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_j Y_{ij}$, $\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \bar{Y}$, $N = \sum_i n_i$
Varianztabelle:

Quelle	SS	df	MS	F	E(MS)
Zwischen	SS_B	$m-1$	$\text{MS}_B = \dfrac{\text{SS}_B}{m-1}$	$F = \dfrac{\text{MS}_B}{\text{MS}_W}$	$\sigma^2 + \frac{1}{m-1} \sum_i n_i \alpha_i^2$
Fehler	SS_W	$N-m$	$\text{MS}_W = \dfrac{\text{SS}_W}{N-m}$		σ^2
Total	SS_T	$N-1$			

Ablehnungsbereich: $F > F_{1-\alpha}(m-1,\ N-m)$
Kontraste:

$$\sum_{i=1}^m c_i \cdot \bar{Y}_i \quad \text{mit} \ \sum_i c_i = 0$$

Orthogonalität: $\sum_i c_{ij} \cdot c_{ik} = 0$ für Paare (j, k) von Kontrasten

Hypothese: H_0: $\sum_i c_i \cdot \mu_i = 0$
Teststatistik:

$$F = MS_{Kontr}/MS_W \quad \text{mit } MS_{Kontr} = SS_{Kontr} = (\sum_i c_i \cdot \bar{Y}_i)^2 / \sum_i \frac{c_i^2}{n_i}$$

Ablehnungsbereich: $F > F_{1-\alpha}(1,\ N-m)$

6.1.2 Modell mit zufälligen Effekten

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

Annahmen: $\alpha_i \sim N(0, \sigma_A^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, alle Zufallsvariablen sind voneinander unabhängig
Hypothesen: H_0: $\sigma_A^2 = 0$, H_1: $\sigma_A^2 > 0$
Varianztabelle: s. Modell mit festen Effekten, außer $E(MS_B) = \sigma^2 + n \cdot \sigma_A^2$
Ablehnungsbereich: s. Modell mit festen Effekten

6.2 Zweifaktorielle Varianzanalyse

6.2.1 Modell mit festen Effekten

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}$$

$i = 1, \ldots, I$; $j = 1, \ldots, J$; $k = 1, \ldots, K$; $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$
Hypothesen: H_0^{AB}: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$ für alle i, j, H_0^A: $\alpha_i = 0$ für alle i, H_0^B: $\beta_j = 0$ für alle j
Streuungszerlegung: $SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_W$,

$$\sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y})^2 = J \cdot K \cdot \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y})^2 + I \cdot K \cdot \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y})^2 + K \cdot \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y})^2 + \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij})^2$$

mit $\bar{Y}_{i.} = \frac{1}{JK} \sum_j \sum_k Y_{ijk}$, $\bar{Y}_{.j} = \frac{1}{IK} \sum_i \sum_k Y_{ijk}$, $\bar{Y}_{ij} = \frac{1}{K} \sum_k Y_{ijk}$, $\bar{Y} = \frac{1}{IJK} \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}$
$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}$, $\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}$, $\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}$
Varianztabelle:

Quelle	SS	df	MS	F	E(MS)
A	SS_A	$I-1$	$\mathrm{MS}_A = \frac{\mathrm{SS}_A}{I-1}$	$F_A = \frac{\mathrm{MS}_A}{\mathrm{MS}_W}$	$\sigma^2 + Q_A$
B	SS_B	$J-1$	$\mathrm{MS}_B = \frac{\mathrm{SS}_B}{J-1}$	$F_B = \frac{\mathrm{MS}_B}{\mathrm{MS}_W}$	$\sigma^2 + Q_B$
$A \times B$	SS_{AB}	$(I-1)(J-1)$	$\mathrm{MS}_{AB} = \frac{\mathrm{SS}_{AB}}{(I-1)(J-1)}$	$F_{AB} = \frac{\mathrm{MS}_{AB}}{\mathrm{MS}_W}$	$\sigma^2 + Q_{AB}$
Fehler	SS_W	$IJ(K-1)$	$\mathrm{MS}_W = \frac{\mathrm{SS}_W}{N-IJ}$		σ^2
Total	SS_T	$IJK-1$			

Ablehnungsbereich:
$F_{AB} > F_{1-\alpha}((I-1)(J-1),\ N-IJ)$, $F_A > F_{1-\alpha}(I-1,\ N-IJ)$, $F_B > F_{1-\alpha}(J-1,\ N-IJ)$

6.2.2 Modell mit zufälligen Effekten

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Annahmen: $\alpha_i \sim N(0, \sigma_A^2)$, $\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2)$, $(\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma_{AB}^2)$, $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$, alle Zufallsvariablen sind voneinander unabhängig

Hypothesen: H_0^{AB}: $\sigma^2_{AB} = 0$, H_0^{A}: $\sigma^2_{A} = 0$, H_0^{B}: $\sigma^2_{B} = 0$
Varianztabelle:

Quelle	F	E(MS)
A	$F_A = \mathrm{MS}_A/\mathrm{MS}_{AB} \overset{H_0^{AB}}{=} \mathrm{MS}_A/\mathrm{MS}_E$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{AB} + JK\sigma^2_A$
B	$F_B = \mathrm{MS}_B/\mathrm{MS}_{AB} \overset{H_0^{AB}}{=} \mathrm{MS}_B/\mathrm{MS}_E$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{AB} + IK\sigma^2_B$
$A \times B$	$F_{AB} = \mathrm{MS}_{AB}/\mathrm{MS}_W$	$\sigma^2 + K\sigma^2_{AB}$
Fehler		σ^2

$MS_E = (SS_{AB} + SS_W)/((I-1)(J-1) + I\,J\,(K-1))$

6.3 Einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung

$$Y_{ij} = \mu + \pi_i + \beta_j + (\pi\beta)_{ij}, \quad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J$$

Annahmen: $\pi_i \sim N(0, \sigma^2_P)$, $(\pi\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma^2_{PB})$, alle Zufallsvariablen sind voneinander unabhängig, $\sum_j \beta_j = 0$
Hypothese: H_0: $\beta_j = 0$ für alle j
Streuungszerlegung: $SS_T = \underbrace{SS_P}_{\text{zwischen}} + \underbrace{SS_B + SS_{PB}}_{\text{innerhalb}}$,

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = J \cdot \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y})^2 + I \cdot \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y})^2 + \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y})^2$$

mit $\bar{Y}_{i.} = \frac{1}{J}\sum_j Y_{ij}$, $\bar{Y}_{.j} = \frac{1}{I}\sum_i Y_{ij}$, $\bar{Y} = \frac{1}{IJ}\sum_i \sum_j Y_{ij}$
Varianztabelle:

Quelle	SS	df	MS	F	E(MS)
P	SS_P	$I-1$	$\mathrm{MS}_P = \dfrac{\mathrm{SS}_P}{I-1}$		$\sigma^2_{PB} + J \cdot \sigma^2_P$
B	SS_B	$J-1$	$\mathrm{MS}_B = \dfrac{\mathrm{SS}_B}{J-1}$	$F = \dfrac{\mathrm{MS}_B}{\mathrm{MS}_{PB}}$	$\sigma^2_{PB} + Q_B$
Fehler	SS_{PB}	$(I-1)(J-1)$	$\mathrm{MS}_{PB} = \dfrac{\mathrm{SS}_{PB}}{(I-1)(J-1)}$		σ^2_{PB}

Ablehnungsbereich: $F > F_{1-\alpha}(J-1,\ (I-1)(J-1))$

7 Kovarianzanalyse

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta \cdot X_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}, \quad \alpha_1 := 0, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$$

Parameterschätzung: $\hat{\beta} = SC_W/SS_W(X)$, $\bar{y}_{i.} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta} \cdot \bar{x}_{i.}$

$$SC_W = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) \cdot (x_{ij} - \bar{x}_{i.}), \quad SS_W(X) = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$$

mit $\bar{x}_{i.} = \frac{1}{n}\sum_j x_{ij}$, $\bar{y}_{i.} = \frac{1}{n}\sum_j y_{ij}$, $N = m \cdot n$
Inkrementeller F-Test: H_0: $\vartheta_p = 0$ für einige p aus Modell M_1
Teststatistik:

$$F = \frac{(SS_{\hat{Y}1} - SS_{\hat{Y}0})/(q_1 - q_0)}{SS_{\hat{\varepsilon}1}/(N - q_1)} = \frac{(SS_{\hat{\varepsilon}0} - SS_{\hat{\varepsilon}1})/(q_1 - q_0)}{SS_{\hat{\varepsilon}1}/(N - q_1)} = \frac{N - q_1}{q_1 - q_0} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{1 - R_1^2}$$

mit $SS_{\hat{Y}0}, SS_{\hat{\varepsilon}0}$ bzw. $SS_{\hat{Y}1}, SS_{\hat{\varepsilon}1}$ erklärte und Residualstreuung von M_0 bzw. M_1, q_0 bzw. q_1 Anzahl der Parameter in M_0 bzw. M_1
Ablehnungsbereich: $F > F_{1-\alpha}(q_1 - q_0, N - q_1)$