Vorlesung Statistik II

Florian Wickelmaier

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Sommersemester 2026

Beispiel

Zur Berechnung der Summen der Abweichungsquadrate greifen wir auf die bereits vorliegenden Parameterschätzungen zurück

Man erhält für die Haupteffekte

$$ss_A = K \cdot J \cdot \sum_{i=1}^{I} \hat{\alpha}_i^2 = 5 \cdot 2 \cdot [23.25^2 + (-23.25)^2] = 10811.25$$

$$ss_B = K \cdot I \cdot \sum_{j=1}^{J} \hat{\beta}_j^2 = 5 \cdot 2 \cdot [7.75^2 + (-7.75)^2] = 1201.25$$

Für die Interaktion berechnet man

$$\begin{aligned} ss_{A\times B} &= K \cdot \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (\widehat{\alpha\beta})_{ij}^2 \\ &= 5 \cdot [5.25^2 + (-5.25)^2 + (-5.25)^2 + 5.25^2] = 551.25 \end{aligned}$$

Beispiel

Mit den Stichprobenvarianzen

$$s_{11}^2 = 33, \quad s_{12}^2 = 108.5, \quad s_{21}^2 = 41, \quad s_{22}^2 = 44.5$$

ergibt sich für die Residuen

$$ss_W = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (K-1) s_{ij}^2 = (5-1) \cdot [33 + 108.5 + 41 + 44.5] = 908$$

Beispiel

Damit hat man folgende ANOVA-Tabelle

Quelle	SS	df	MS	F	p
Faktor A	10811.25	1	10811.25	190.51	<0.0001
Faktor B	1201.25	1	1201.25	21.17	0.0003
Interaktion $A \times B$	551.25	1	551.25	9.71	0.0066
Residuen	908.00	16	56.75		
Gesamt	13471.75	19			

Teststärke und Versuchsplanung

Es soll überprüft werden, ob der Motivationseffekt auf die Zufriedenheit bei mit einem Partner Lebenden (minimal 15 Scorepunkte) stärker ist als bei allein Lebenden

Bestimmung des Stichprobenumfangs n, um mit ca. 80% Power (Irrtumswahrscheinlichkeit 5%) diesen Interaktionseffekt bei $\sigma = 8$ zeigen zu können, $H_0^{A\times B}$: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

In der folgenden Poweranalyse sind die Effekte relativ zur Kontrollgruppe zu interpretieren (*Dummykodierung*), dabei bezieht sich `mu` auf den Erwartungswert der allein Lebenden mit niedriger Motivation

Teststärke und Versuchsplanung

```
n <- 40                                  # Gesamtstichprobe
dat <- data.frame(
  motiv = factor(rep(1:2, each = n/2), labels = c("low", "high")),
    fam = factor(rep(1:2, 2, each = n/4), labels = c("single", "partner"))
)
beta <- c(mu = 30, a2 = 30, b2 = 5, ab22 = 15)
means <- model.matrix(~ motiv*fam, dat) %*% beta

pval <- replicate(2000, {
  y <- means + rnorm(n, sd = 8)    # y = mu + a + b + ab + e
  m <- aov(y ~ motiv*fam, dat)
  summary(m)[[1]]$"Pr(>F)"[3]      # Test der Interaktion
})
mean(pval < 0.05)
```

Beispiel

Dateneingabe

```
dat <- read.table(header = TRUE,
                  text = "
  motiv     fam score
   high partner    85
   high partner    89
   high partner    91
   high partner    95
   high partner    80
   high  single    50
   high  single    52
   high  single    65
   high  single    71
   high  single    72
    low partner    34
    low partner    30
    low partner    28
    low partner    23
    low partner    40
    low  single    30
    low  single    28
    low  single    33
    low  single    16
    low  single    23
")
```

Beispiel

Mit den äquivalenten Aufrufen

```
m <- aov(score ~ 1 + motiv + fam + motiv:fam, data = dat)
m <- aov(score ~ motiv*fam, data = dat)
summary(m)
```

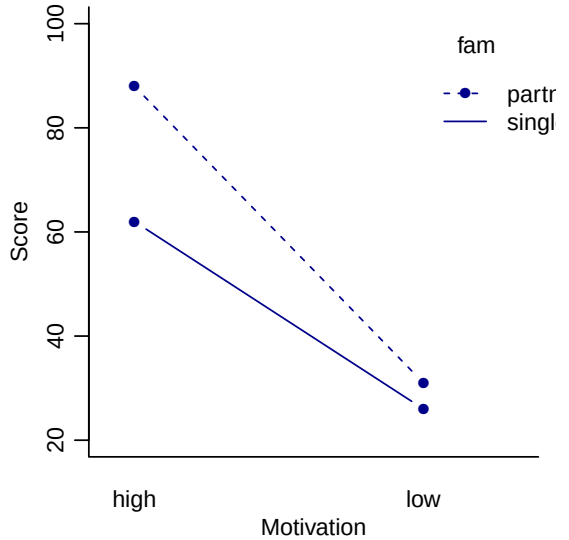
resultiert folgende ANOVA-Tabelle

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
motiv	1	10811.2	10811.2	190.51	2.6e-10
fam	1	1201.2	1201.2	21.18	0.0003
motiv:fam	1	551.3	551.3	9.71	0.0066
Residuals	16	908.0	56.8		

Der Interaktionseffekt wird zwar signifikant, $F(1, 16) = 9.71$, $p = .007$, ist wegen der zu niedrigen Power ($n = 20$ statt $n = 40$) aber verzerrt

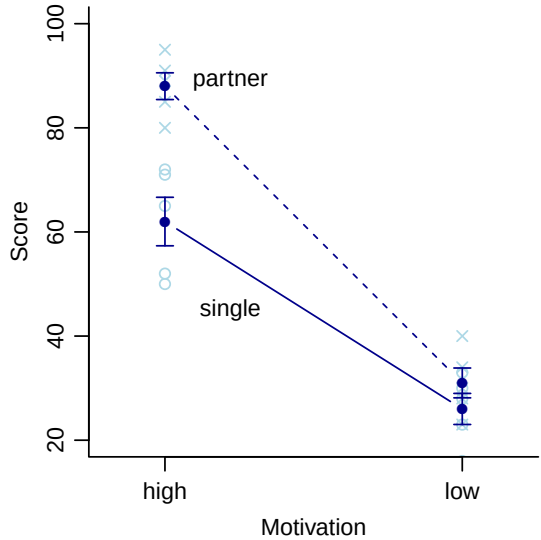
Grafische Darstellung der Ergebnisse

```
with(
  dat,
  interaction.plot(motiv, fam, score,
                   type = "b",
                    pch = 16,
                   xlab = "Motivation",
                   ylab = "Score")
)
```



Grafische Darstellung der Ergebnisse

Darstellung der Datenpunkte, der Mittelwerte sowie der zugehörigen Standardfehler (erzeugt mit nachfolgendem R-Code)



Grafische Darstellung der Ergebnisse

```
## Mittelwerte und Standardfehler
dat2    <- aggregate(score ~ motiv + fam, dat, mean)
dat2$sd <- aggregate(score ~ motiv + fam, dat, sd)$score
dat2$n  <- aggregate(score ~ motiv + fam, dat, length)$score
dat2$se <- with(dat2, sd/sqrt(n))

plot(score ~ as.numeric(motiv), dat2[dat2$fam == "partner", ],
     type = "b", pch = 16, axes = FALSE, xlab = "Motivation", ylab = "Score")
points(score ~ motiv, dat2[dat2$fam == "single", ], type = "b", pch = 16)
points(score ~ motiv, dat[dat$fam == "partner", ], pch = 4)
points(score ~ motiv, dat[dat$fam == "single", ])
with(dat2, arrows(1:2, score + se, 1:2, score - se,
                  length = .05, angle = 90, code = 3))
text(c(1.19, 1.19), c(85, 50), c("partner", "single"))
axis(1, 1:2, c("high", "low"))
axis(2)
box(bty = "L")
```

Einfaktorielle Varianzanalyse mit zufälligen Effekten

Die Ausprägungen des betrachteten Faktors resultieren aus einer Stichprobenziehung aus einer unterliegenden Population

In Effektdarstellung lautet das Modell mit $n = n_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$, $N = \sum_i n_i$

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{mit} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

wobei

- ε_{ij} stochastisch unabhängig und $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$
- α_i stochastisch unabhängig mit Erwartungswert $E(\alpha_i) = 0$ und Varianz $Var(\alpha_i) = \sigma_A^2$, $\alpha_i \sim N(0, \sigma_A^2)$
- α_i und ε_{ij} paarweise stochastisch unabhängig

Mittlere Quadrate

Mit der Zerlegung der Summe der quadratischen Abweichungen

$$SS_T = SS_B + SS_W = \sum_{i=1}^{m} n\,(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

erhält man für die mittleren quadratischen Abweichungen

$$MS_B = \frac{SS_B}{m-1} \quad \text{und} \quad MS_W = \frac{SS_W}{N-m}$$

und

$$E(MS_B) = n\,\sigma_A^2 + \sigma^2 \quad \text{und} \quad E(MS_W) = \sigma^2$$

Die Konstruktion des statistischen Tests der Effekte α_i des Faktors erfolgt in der gleichen Weise wie im Fall fester Effekte

Einfaktorielle Varianzanalyse mit zufälligen Effekten

Hypothesen

- Nullhypothese

$$H_0: \ \sigma_A^2 = 0$$

- Alternativhypothese

$$H_1: \ \sigma_A^2 > 0$$

Teststatistik

$$F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

Verteilung unter H_0

$$F \sim F(m-1, N-m)$$

Einfaktorielle Varianzanalyse mit zufälligen Effekten

Ablehnungsbereich

$$F > F_{1-\alpha}(m-1, N-m)$$

Beachte

- Die Testentscheidung ist identisch zum Fall mit festen Effekten
- Die Interpretation der Ergebnisse hat sich jedoch auf die hier formulierten Hypothesen zu beziehen
- Der statistische Test unter der Annahme zufälliger Effekte benötigt im Vergleich zum Test bei festen Effekten eine Reihe weiterer Voraussetzungen, welche die Verteilung der α_i und deren stochastische Unabhängigkeit (insbesondere auch von den Fehlerkomponenten ε_{ij}) betreffen

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit zufälligen Effekten

Die Ausprägungen beider Faktoren A und B resultieren aus Stichprobenziehungen aus jeweils unterliegenden Populationen

In Effektdarstellung lautet das Modell

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$\text{mit} \quad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J, \quad k = 1, \ldots, K$$

In diesem Modell sind sämtliche Größen außer dem Grand Mean μ Zufallsvariablen

Gegenüber der einfaktoriellen Varianzanalyse mit zufälligen Effekten ist hier für sämtliche Effekte anzunehmen, dass sie normalverteilt sind

Voraussetzungen

Die ε_{ijk} sind verteilt gemäß $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$

Die α_i sind verteilt gemäß $\alpha_i \sim N(0, \sigma_A^2)$

Die β_j sind verteilt gemäß $\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2)$

Die $(\alpha\beta)_{ij}$ sind verteilt gemäß $(\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma_{AB}^2)$

Die α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$ und ε_{ijk} sind paarweise stochastisch unabhängig

Zufällige Effekte

Im Gegensatz zur Betrachtung fester Effekte müssen sich die Terme α_i für die Haupteffekte der tatsächlich ausgewählten Faktorstufen (als Realisierung der Zufallsvariablen) nicht zu Null summieren

- Obwohl (in der Population) gilt $E(\alpha_i) = 0$, muss in der Stichprobe der ausgewählten Faktorstufen die Summe $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i$ (und damit auch der entsprechende Mittelwert als Schätzung von $E(\alpha_i)$) *nicht* notwendigerweise Null sein

Gleiches gilt für die Summe $\sum_{j=1}^{J} \beta_j$ und die Summen

$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{ij}$$

mit den Realisierungen β_j und $(\alpha\beta)_{ij}$ der entsprechenden Zufallsvariablen

Streuungszerlegung

Mit der Zerlegung der Summe der quadratischen Abweichungen

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{A\times B} + SS_W$$

erhält man für die mittleren quadratischen Abweichungen

$$MS_A = \frac{SS_A}{I-1}, \qquad MS_B = \frac{SS_B}{J-1}$$

und

$$MS_{A\times B} = \frac{SS_{A\times B}}{(I-1)(J-1)}, \qquad MS_W = \frac{SS_W}{I\,J\,(K-1)}$$

folgende Erwartungswerte

Mittlere Quadrate

Es gilt

$$
\begin{aligned}
E(MS_A) &= J\,K\,\sigma_A^2 + K\,\sigma_{AB}^2 + \sigma^2 \\
E(MS_B) &= I\,K\,\sigma_B^2 + K\,\sigma_{AB}^2 + \sigma^2 \\
E(MS_{A\times B}) &= K\,\sigma_{AB}^2 + \sigma^2 \\
E(MS_W) &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Beachte

- Im Gegensatz zur zweifaktoriellen Varianzanalyse mit festen Effekten ist hier der Erwartungswert $E(MS_A)$ (bzw. $E(MS_B)$) der mittleren Abweichungsquadrate eine gewichtete Summe der Varianz σ_A^2 (bzw. σ_B^2), der Fehlervarianz σ^2 *und* der Varianz der Interaktion σ_{AB}^2

Mittlere Quadrate

Unter der Nullhypothese H_0: $\sigma_A^2 = 0$ ergibt sich dann

$$E(MS_A) = K\,\sigma_{AB}^2 + \sigma^2$$

Wegen

$$E(MS_{A\times B}) = K\,\sigma_{AB}^2 + \sigma^2$$

sind MS_A und $MS_{A\times B}$ unter der Nullhypothese voneinander stochastisch unabhängige und erwartungstreue Schätzfunktionen für $K\,\sigma_{AB}^2 + \sigma^2$

Für $MS_{A\times B}$ gilt dies auch unter der Alternativhypothese H_1, die Schätzfunktion MS_A wird dann aber größere Werte annehmen, die auf den zusätzlichen und von den Effekten abhängigen Term zurück gehen

Konstruktion der Teststatistik

Daher ist für eine statistische Überprüfung der Haupteffekte des Faktors A der Quotient aus den mittleren Abweichungsquadraten MS_A und $MS_{A\times B}$ zu bilden

- Dieser Test unterscheidet sich somit grundlegend von dem bei Vorliegen fester Effekte, wo ein Quotient aus MS_A und MS_W betrachtet wurde!

Entsprechend ist die Vorgehensweise beim statistischen Test der Haupteffekte des Faktors B, wo ebenfalls der Quotient aus den mittleren Abweichungsquadraten MS_B und $MS_{A\times B}$ zu betrachten ist

Der Test auf Interaktionseffekte verläuft dagegen vollkommen analog zum Fall fester Effekte

Statistischer Test von $H_0^{A\times B}$ vs. $H_1^{A\times B}$

Hypothesen

$$H_0^{A\times B}:\ \sigma^2_{AB} = 0, \quad H_1^{A\times B}:\ \sigma^2_{AB} > 0$$

Teststatistik

$$F_{A\times B} = \frac{MS_{A\times B}}{MS_W}$$

Verteilung unter $H_0^{A\times B}$

$$F_{A\times B} \sim F((I-1)(J-1),\ IJ(K-1))$$

Ablehnungsbereich

$$F_{A\times B} > F_{1-\alpha}((I-1)(J-1),\ IJ(K-1))$$

Statistischer Test von H_0^A vs. H_1^A

Hypothesen

$$H_0^A\colon\ \sigma_A^2 = 0, \quad H_1^A\colon\ \sigma_A^2 > 0$$

Teststatistik

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{A\times B}}$$

Verteilung unter H_0^A

$$F_A \sim F(I-1,\ (I-1)(J-1))$$

Ablehnungsbereich

$$F_A > F_{1-\alpha}(I-1,\ (I-1)(J-1))$$

Statistischer Test von H_0^B vs. H_1^B

Hypothesen

$$H_0^B: \ \sigma_B^2 = 0, \quad H_1^B: \ \sigma_B^2 > 0$$

Teststatistik

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_{A\times B}}$$

Verteilung unter H_0^B

$$F_B \sim F(J-1, \ (I-1)(J-1))$$

Ablehnungsbereich

$$F_B > F_{1-\alpha}(J-1, \ (I-1)(J-1))$$

Statistischer Test von H_0^A vs. H_1^A unter der Annahme $\sigma^2_{A\times B} = 0$

Unter der Annahme $\sigma^2_{AB} = 0$, dass *kein* Interaktionseffekt vorliegt, ergibt sich

$$E(MS_A) = J\,K\,\sigma_A^2 + \sigma^2 \quad \text{und} \quad E(MS_B) = I\,K\,\sigma_B^2 + \sigma^2$$

sowie

$$E(MS_{A\times B}) = E(MS_W) = \sigma^2$$

Damit erhält man eine Schätzung von σ^2 durch "Poolen" von $MS_{A\times B}$ und MS_W, d. h. durch

$$MS_E = \frac{SS_{A\times B} + SS_W}{(I-1)(J-1) + I\,J\,(K-1)}$$

Statistischer Test von H_0^A vs. H_1^A unter der Annahme $\sigma^2_{A\times B} = 0$

Teststatistik

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_E}$$

Verteilung unter H_0^A

$$F_A \sim F(I-1,\ I\,J\,K - I - J + 1)$$

Statistischer Test von H_0^B vs. H_1^B unter der Annahme $\sigma^2_{A\times B} = 0$ Teststatistik

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_E}$$

Verteilung unter H_0^B

$$F_B \sim F(J-1,\ I\,J\,K - I - J + 1)$$

Beispiel

Ein projektiver Test bestehe aus 10 Karten, die jeweils einem einzelnen Probanden vorgegeben werden

Zur Überprüfung der Frage, ob die Reihenfolge der Vorgabe bzw. die den Test durchführende Person (Administrator) einen Einfluss auf das Ergebnis haben sei folgendes Experiment durchgeführt worden (Poweranalyse siehe Beispielsammlung)

- Von den $10! = 3\,628\,800$ möglichen Reihenfolgen werden vier als Stufen des Faktors A zufällig ausgewählt
- Es werden zufällig vier Personen (Administratoren) ausgewählt, die für die Vorgabe der Tests trainiert werden (Faktor B)
- Jeder Administrator gibt den Test in jeder der vier Reihenfolgen jeweils zwei zufällig ausgewählten Probanden vor

Beispiel

Daten (Hays, 1994, Table 13.12.1)

		Administrator			
		1	2	3	4
Reihen-	I	26	30	25	28
		25	33	23	30
folge	II	26	25	27	27
		24	33	17	26
	III	33	26	30	31
		27	32	24	26
	IV	36	37	37	39
		28	42	33	25

Beispiel

Es ergibt sich folgende ANOVA-Tabelle

Quelle	SS	df	MS
Reihenfolge (A)	363.09	3	121.03
Administrator (B)	122.34	3	40.78
Interaktion $A \times B$	82.78	9	9.20
Residuen	310.50	16	19.41
Gesamt	878.71	31	

Beispiel

Für die Interaktion erhält man

$$F_{A\times B} = \frac{MS_{A\times B}}{MS_W} = \frac{9.20}{19.41} = 0.47$$

Der zugehörige p-Wert der $F(9, 16)$-Verteilung ist $p = 0.87$, sodass die Entscheidung zugunsten der Hypothese $\sigma^2_{AB} = 0$ getroffen wird

Für die Prüfung der Haupteffekte der beiden Faktoren A und B wird im Folgenden $\sigma^2_{AB} = 0$ angenommen und als Schätzung von σ^2 die "gepoolte" Fehlervarianz MS_E verwendet

Beispiel

Damit ergibt sich

$$MS_E = \frac{SS_{A\times B} + SS_W}{(I-1)(J-1) + I\,J\,(K-1)} = \frac{82.78 + 310.50}{9 + 16} = 15.73$$

Für den Haupteffekt der Reihenfolge berechnet man dann

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_E} = \frac{121.03}{15.73} = 7.69$$

und mit der Verteilung $F(3, 25)$ den p-Wert $p = 0.001$

Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ ist daher die Nullhypothese H_0^A zu verwerfen, sodass für den projektiven Test ein Einfluss der Reihenfolge der Darbietung der 10 Karten anzunehmen ist

Beispiel

Für den Haupteffekt des Administrators erhält man

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_E} = \frac{40.78}{15.73} = 2.59$$

und mit der Verteilung $F(3, 25)$ den p-Wert $p = 0.075$

Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ ist daher die Nullhypothese H_0^B beizubehalten

Die Annahme, die Ergebnisse des projektiven Tests würden nicht durch die Person beeinflusst, die den Test vorgibt, ist aber möglicherweise mit einem großen β-Fehler behaftet

Beispiel

Ohne die zusätzliche Annahme $\sigma^2_{AB} = 0$ erhielte man

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{A\times B}} = \frac{121.03}{9.20} = 13.16$$

und mit der Verteilung $F(3, 9)$ und dem p-Wert $p = 0.001$, sowie

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_{A\times B}} = \frac{40.78}{9.20} = 4.43$$

und mit der Verteilung $F(3, 9)$ den p-Wert $p = 0.036$

Varianzanalyse mit zufälligen Effekten in R: Dateneingabe

```
dat <- read.table(header = TRUE, text = "
  order admin subj score
    O1    A1   S1    26
    O1    A1   S2    25
    O1    A2   S3    30
    O1    A2   S4    33
    O1    A3   S5    25
    O1    A3   S6    23
    O1    A4   S7    28
    O1    A4   S8    30
    O2    A1   S9    26
    O2    A1   S10   24
    O2    A2   S11   25
    O2    A2   S12   33
    O2    A3   S13   27
    O2    A3   S14   17
    O2    A4   S15   27
    O2    A4   S16   26
    O3    A1   S17   33
    O3    A1   S18   27
    O3    A2   S19   26
    O3    A2   S20   32
    O3    A3   S21   30
    O3    A3   S22   24
    O3    A4   S23   31
    O3    A4   S24   26
    O4    A1   S25   36
    O4    A1   S26   28
    O4    A2   S27   37
    O4    A2   S28   42
    O4    A3   S29   37
    O4    A3   S30   33
    O4    A4   S31   39
    O4    A4   S32   25
")
```

Varianzanalyse mit zufälligen Effekten in R

Die Betrachtung zufälliger Effekte wird in der Funktion `aov()` durch Spezifizierung der entsprechenden Fehlerkomponente in der Formulierung des Modells angegeben

```
score ~ 1 + Error(order + admin + order:admin)
score ~ Error(order*admin)
```

Mit dem additiven Term `Error(order*admin)` wird angegeben, dass die Haupteffekte auf die mittleren Abweichungsquadrate der Interaktion zwischen den Faktoren `order` und `admin` zu beziehen sind

Damit ergibt sich folgende Eingabe

```
m <- aov(score ~ Error(order*admin), data = dat)
summary(m)
```

Varianzanalyse mit zufälligen Effekten in R

Man erhält folgende Ausgabe

```
Error: order
      Df Sum Sq Mean Sq
order  3 363.09  121.03

Error: admin
      Df  Sum Sq Mean Sq
admin  3 122.344  40.781

Error: order:admin
            Df Sum Sq Mean Sq
order:admin  9 82.781   9.198

Error: Within
          Df  Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Residuals 16 310.500  19.406
```

Varianzanalyse mit zufälligen Effekten in R

Die Spezifizierung eines Modells mit zufälligen Effekten durch den additiven Term `Error(order*admin)` hat zur Folge, dass R keine F- bzw. p-Werte ausgibt

Diese Berechnungen sind daher mit den ausgegebenen mittleren Abweichungsquadraten von Hand durchzuführen

- Dabei können dann die Berechnungen bei den statistischen Tests der Haupteffekte entweder für den allgemeinen Fall oder unter der Annahme $\sigma^2_{AB} = 0$ durchgeführt werden

Leider ist das Extrahieren der mittleren Abweichungsquadrate aus der Ausgabe etwas umständlich, z. B.

```
summary(m)$"Error: Within"[[1]]$"Mean Sq"  # MS_W
[1] 19.406
```