Vorlesung Statistik II

Florian Wickelmaier

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Sommersemester 2026

Anpassungstests

Die besprochenen parametrischen Tests von Lage- und Streuungsparametern beruhen häufig auf der expliziten Annahme, dass die untersuchten Merkmale eine spezifische Verteilung aufweisen

- In den meisten Fällen wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Merkmale normalverteilt sind

Grundsätzlich hat man bei derartigen Annahmen zwei verschiedene Situationen

- Es wird lediglich ein bestimmter Verteilungstyp spezifiziert (z. B. Binomial- oder Normalverteilung), ohne dass deren zugrunde liegenden Parameter als bekannt vorausgesetzt werden
- Die Verteilung wird als vollständig vorgegeben betrachtet, d. h. einschließlich der Werte der zugrunde liegenden Parameter (z. B. p bzw. μ und σ)

Anpassungstests

Verfahren, mit denen statistisch überprüft werden kann, ob eine empirisch erhobene Verteilung mit einer theoretisch vorgegebenen Verteilung übereinstimmt, heißen

- *Anpassungstests* bzw.
- *Goodness-of-Fit-Tests*

Im Folgenden besprechen wir einen vielseitig einsetzbaren statistischen Test, der auf einer Chi-Quadrat-verteilten Teststatistik beruht

- Die Teststatistik in Chi-Quadrat-Anpassungstests wird auch als *Pearsonsche Teststatistik* bezeichnet

Wir betrachten zunächst den Anpassungstest für eine Multinomialverteilung und werden dann statistische Tests in anderen Situationen darauf zurückführen

Anpassungstest für die Wahrscheinlichkeiten einer Multinomialverteilung

Wir betrachten also stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die jeweils mit identischen Wahrscheinlichkeiten einen von r verschiedenen Werten annehmen können

- Für den Wertevorrat setzen wir

$$X_i(\Omega) = \{1, \ldots, r\}$$

für $i = 1, \ldots, n$

Beispiel

- Beim n-fach wiederholten einmaligen Würfeln nehmen die Zufallsvariablen X_i, $i = 1, \ldots, n$, jeweils Werte aus der Menge $\{1, \ldots, 6\}$ an

Multinomialverteilung

Für $k \in \{1, \ldots, r\}$ gelte dann

$$P(X_i = k) = p_k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = 1,$$

wobei die Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_r$ als gegeben vorausgesetzt werden

Beispiel

- Für das Zufallsexperiment des einmaligen Würfelns gilt

$$p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$$

Hypothesen

Wir formulieren somit die Nullhypothese

$$H_0\colon\ P(X_i = k) = p_k \text{ für alle } k = 1, \ldots, r$$

und die Alternativhypothese

$$H_1\colon\ P(X_i = k) \neq p_k \text{ für mindestens ein } k = 1, \ldots, r$$

Für alle $k = 1, \ldots, r$ betrachten wir dann jeweils die Zufallsvariable

$$Y_k = \text{ Anzahl der } X_i \text{ mit } X_i = k \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

Multiple Binomialtests

Auf Grund der getroffenen Annahmen sind die Zufallsvariablen Y_k unter der Nullhypothese binomialverteilt,

$$Y_k \sim B(n, p_k)$$

für alle $k = 1, \ldots, r$

Daher gilt für alle $k = 1, \ldots, r$

$$E(Y_k) = n\,p_k, \quad Var(Y_k) = n\,p_k\,(1 - p_k),$$

d. h. unter der Nullhypothese werden $n\,p_k$ Beobachtungen des Wertes k erwartet

Grundsätzlich könnte man für jedes $k \in \{1, \ldots, r\}$ einen Binomialtest zur Gültigkeit von $P(X_i = k) = p_k$ durchführen, gesucht ist aber ein simultaner statistischer Test für die gesamte Multinomialverteilung

Teststatistik

Eine solche Teststatistik bilden die quadrierten Abweichungen der beobachteten Häufigkeiten Y_k von den erwarteten Häufigkeiten $n\,p_k$, normiert an den erwarteten Häufigkeiten $n\,p_k$

- Die *Pearsonsche Teststatistik* ist gegeben durch

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(Y_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k}$$

Die Teststatistik ist für großen Stichprobenumfang n approximativ Chi-Quadrat-verteilt mit $r-1$ Freiheitsgraden

Die Approximation ist hinreichend gut für

- $n\,p_k \geq 1$ für alle $k = 1, \ldots, r$
- $n\,p_k \geq 5$ für mindestens 80% der Fälle

Freiheitsgrade

Der "Verlust" eines Freiheitsgrades der aus r Summanden gebildeten Pearsonschen Teststatistik erklärt sich aus der Tatsache, dass gilt

$$p_1 + \ldots + p_r = 1$$

bzw.

$$Y_1 + \ldots + Y_r = n$$

Das bedeutet, dass jede Häufigkeit durch die restlichen $r - 1$ Häufigkeiten deterministisch festgelegt ist

- Innerhalb des durch die n Beobachtungen vorgegeben Rahmens können also nur $r - 1$ Häufigkeiten "frei" variieren

Testentscheidung

Für die Testentscheidung ist zu beachten

- Jeder einzelne Summand der Pearsonschen Teststatistik ist nichtnegativ (≥ 0)
- Perfekte Anpassung der Beobachtungen an die in der Nullhypothese formulierte Verteilungsannahme hätte einen Wert von $\chi^2 = 0$ zur Folge
- Je stärker der Wert von Null abweicht, desto eher spricht er gegen die Gültigkeit der Nullhypothese

Damit kommt man für eine vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α zu folgender Testentscheidung

- Die Nullhypothese H_0 wird verworfen, wenn $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$, mit dem $(1-\alpha)$-Quantil $\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ der Chi-Quadrat-Verteilung mit $r-1$ Freiheitsgraden

Anpassungstest für die Wahrscheinlichkeiten einer Multinomialverteilung

Annahmen

- $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch multinomialverteilt (Wertevorrat $\{1, \ldots, r\}$)

Hypothesen

- H_0: $P(X_i = k) = p_k$ für alle $k = 1, \ldots, r$ $(i = 1, \ldots, n)$
- H_1: $P(X_i = k) \neq p_k$ für mindestens ein $k = 1, \ldots, r$ $(i = 1, \ldots, n)$

Teststatistik

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(Y_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k}$$

mit Y_k gleich der Anzahl der X_i mit $X_i = k$

Anpassungstest für die Wahrscheinlichkeiten einer Multinomialverteilung

Verteilung der Teststatistik unter H_0

- Für hinreichend großen Stichprobenumfang n (also für $n \to \infty$) approximativ Chi-Quadrat-verteilt mit $r - 1$ Freiheitsgraden
- Die Approximation ist hinreichend gut für
  - $n\,p_k \geq 1$ für alle $k = 1, \ldots, r$
  - $n\,p_k \geq 5$ für mindestens 80% der Fälle

Ablehnungsbereich

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$$

mit dem $(1-\alpha)$-Quantil $\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ der Chi-Quadrat-Verteilung mit $r-1$ Freiheitsgraden

Beispiel

Es soll geprüft werden, ob ein bestimmter Würfel fair ist, d. h. ob er eine erhöhte Wahrscheinlichkeit p_6 besitzt, eine Sechs zu zeigen

Zunächst bestimmen wir den Stichprobenumfang n, um eine Erhöhung auf $p_6 = 0.21$ mit ca. 85% Power bei $\alpha = 0.1$ nachweisen zu können

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
unter H_1	.158	.158	.158	.158	.158	.21
unter H_0	.167	.167	.167	.167	.167	.167

```
n <- 1000
pval <- replicate(2000, {
  x <- rmultinom(1, size = n, prob = c(rep(0.158, 5), 0.21))
  chisq.test(x, p = rep(1/6, 6))$p.value
})
mean(pval < 0.1)
```

Beispiel

Anschließend werden mit dem Würfel unabhängig voneinander 1000 Würfe durchgeführt

Es ergeben sich folgende Häufigkeiten

k	1	2	3	4	5	6
h_k	162	160	166	164	170	178

Dabei bezeichnet h_k die Realisierung der Zufallsvariable Y_k (h_k steht für Häufigkeit)

Wegen $p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$ gilt für die unter H_0 erwarteten Häufigkeiten $n\,p_k = 166.67$ für alle $k = 1, \ldots, 6$

Beispiel

Für die Pearsonsche Teststatistik berechnet man dann

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(162-166.67)^2}{166.67} + \frac{(160-166.67)^2}{166.67} + \frac{(166-166.67)^2}{166.67} \\ &\quad + \frac{(164-166.67)^2}{166.67} + \frac{(170-166.67)^2}{166.67} + \frac{(178-166.67)^2}{166.67} \\ &= 0.1309 + 0.2669 + 0.0028 + 0.0428 + 0.0665 + 0.7702 \\ &= 1.28\end{aligned}$$

Bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.1$ und dem 0.9-Quantil $\chi^2_{0.9}(5) = 9.24$ der Chi-Quadrat-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden, wird die Nullhypothese beibehalten

Eine Erhöhung auf $p_6 = 0.21$ kann mit den vorliegenden Daten nicht nachgewiesen werden

Testentscheidung mit Funktion `chisq.test()`

Die Berechnung des p-Wertes erfolgt über die Eingabe

```
x <- c(162, 160, 166, 164, 170, 178)
chisq.test(x, p = rep(1/6, 6))
```

Dabei wird mit `rep(1/6, 6)` ein Vektor erzeugt, der 6-mal den Wert $1/6$ enthält

Als Ausgabe erhält man

```
Chi-squared test for given probabilities
data:  x
X-squared = 1.28, df = 5, p-value = 0.937
```

Liegt kein Laplace-Experiment vor, dann spezifiziert man im Vektor `p` die in der Nullhypothese angenommenen Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Multinomialverteilung, z. B. für einen gezinkten Würfel

```
chisq.test(x, p = c(rep(0.15, 5), 0.25))
```

Anpassungstest für Verteilungsfunktion einer (quasi-)stetigen Zufallsvariable

Fall 1: Verteilung vollständig bekannt

Der Anwendungsbereich der Pearsonschen Teststatistik wird im Folgenden auf vollständig bekannte Verteilungsfunktionen F einer (quasi-)stetigen Zufallsvariable erweitert

Wie bei der Betrachtung empirischer Häufigkeitsverteilungen (quasi-)stetiger Merkmale (s. Statistik I) nehmen wir hierzu eine *Klasseneinteilung* (Gruppierung, Kategorisierung) der möglichen Werte der Zufallsvariable vor

Wir betrachten hierzu die r Klassen benachbarter Intervalle der Form

$$(-\infty, c_1], (c_1, c_2], \ldots, (c_{r-2}, c_{r-1}], (c_{r-1}, +\infty)$$

definiert durch die Werte $c_0 = -\infty < c_1 < c_2 < \ldots < c_{r-2} < c_{r-1}$

Kategorisierung

Damit ergeben sich unter der Annahme, dass die Zufallsvariable gemäß der Verteilungsfunktion F verteilt ist, die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_1 &= F(c_1) \\ p_2 &= F(c_2) - F(c_1) \\ &\vdots \\ p_{r-1} &= F(c_{r-1}) - F(c_{r-2}) \\ p_r &= 1 - F(c_{r-1}) \end{aligned}$$

Die Wahl der Werte $c_1, c_2, \ldots, c_{r-2}, c_{r-1}$ sollte die für die Approximation erforderlichen Restriktionen erfüllen, d. h. es sollte gelten

- $n\,p_k \geq 1$ für alle $k = 1, \ldots, r$; $n\,p_k \geq 5$ für mindestens 80% der Fälle

Anpassungstest für Verteilungsfunktion einer (quasi-)stetigen Zufallsvariable

Die vorgenommene Gruppierung in r Klassen erlaubt die Verwendung des Anpassungstests für die Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_r$ einer Multinomialverteilung

Die grundlegenden Annahmen unterscheiden sich allerdings von diesem Fall

- $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt

Die tatsächlich überprüften Hypothesen sind

- H_0: $P(X_i = k) = p_k$ für alle $k = 1, \ldots, r$ $(i = 1, \ldots, n)$
- H_1: $P(X_i = k) \neq p_k$ für mindestens ein $k = 1, \ldots, r$ $(i = 1, \ldots, n)$

Teststatistik

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(Y_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k}$$

mit Y_k gleich der Anzahl der X_i mit $X_i \in (c_{k-1}, c_k]$ für $k = 1, \ldots, r-1$ und $X_i \in (c_{r-1}, +\infty)$ für $k = r$

Anpassungstest für Verteilungsfunktion einer (quasi-)stetigen Zufallsvariable

Verteilung der Teststatistik unter H_0

- Für hinreichend großen Stichprobenumfang n (also für $n \to \infty$) approximativ Chi-Quadrat-verteilt mit $r-1$ Freiheitsgraden
- Die Approximation ist hinreichend gut für
  - $n\,p_k \geq 1$ für alle $k = 1, \ldots, r$
  - $n\,p_k \geq 5$ für mindestens 80% der Fälle

Ablehnungsbereich

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$$

mit dem $(1-\alpha)$-Quantil $\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ der Chi-Quadrat-Verteilung mit $r-1$ Freiheitsgraden

Eigentliche Hypothesen

Obwohl in der Teststatistik nur die in Klassen gruppierten Daten verwendet werden, zielt der Test aber eigentlich auf eine Beantwortung der Frage, ob die erhobenen Daten gemäß der Verteilungsfunktion F verteilt sind

Die mit dem dargestellten Test intendierte Entscheidung betrifft die Hypothesen

- H_0': Die $X_1, \ldots, X_n$ sind gemäß der Verteilungsfunktion F verteilt
- H_1': Die $X_1, \ldots, X_n$ sind *nicht* gemäß der Verteilungsfunktion F verteilt

Dabei wird die Verteilungsfunktion F (und damit auch deren Parameter) als vollständig bekannt vorausgesetzt

- Die Verteilungsfunktion F ist beispielsweise eine vollständig spezifizierte Normalverteilung, wie etwa $N(0,1)$ oder $N(100, 15^2)$

Beispiel

Es soll geprüft werden, ob ein Intelligenztest Werte produziert, die gemäß $N(100, 15^2)$ normalverteilt sind

Zunächst bestimmen wir den Stichprobenumfang n, um einen Unterschied in der Standardabweichung von 7 IQ-Punkten mit ca. 90% Power bei $\alpha = 0.05$ nachweisen zu können

```
n <- 100
pval <- replicate(2000, {
  x <- rnorm(n, mean = 100, sd = 15 + 7)
  y <- table(cut(x, breaks = c(-Inf, seq(80, 120, 5), Inf)))
  p <- pnorm(c(seq(80, 120, 5), Inf), mean = 100, sd = 15)
  chisq.test(y, p = c(p[1], diff(p)))$p.value
})
mean(pval < 0.05)
```

Die Funktion `cut()` nimmt die Klasseneinteilung vor, `pnorm()` berechnet die Klassenwahrscheinlichkeiten unter H_0

Beispiel

Anschließend bearbeitet eine Stichprobe von $n = 100$ Personen den Intelligenztest und die geplante Gruppierung der resultierenden Werte liefert folgende Häufigkeiten

k	1	2	3	4	5
Intervall	$(-\infty, 80]$	$(80, 85]$	$(85, 90]$	$(90, 95]$	$(95, 100]$
Häufigkeit	14	10	8	6	13

k	6	7	8	9	10
Intervall	$(100, 105]$	$(105, 110]$	$(110, 115]$	$(115, 120]$	$(120, +\infty)$
Häufigkeit	12	10	11	7	9

Beispiel

Als Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass eine Beobachtung in das Intervall $(-\infty, 80]$ fällt, erhalten wir

$$p_1 = \Phi\left(\frac{80-100}{15}\right) = 0.0912$$

Für die Wahrscheinlichkeit p_2, dass eine Beobachtung in das Intervall $(80, 85]$ fällt, berechnet man

$$p_2 = \Phi\left(\frac{85-100}{15}\right) - \Phi\left(\frac{80-100}{15}\right) = 0.1587 - 0.0912 = 0.0675$$

Analog für die restlichen Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

Für die Teststatistik berechnet man dann

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(14 - 100 \cdot 0.0912)^2}{100 \cdot 0.0912} + \frac{(10 - 100 \cdot 0.0675)^2}{100 \cdot 0.0675} + \ldots + \frac{(9 - 100 \cdot 0.0912)^2}{100 \cdot 0.0912} \\ &= 2.6097 + 1.5715 + 0.2040 + 2.7732 + 0.0002 + 0.0854 \\ &\quad + 0.2456 + 0.2784 + 0.0097 + 0.0016 \\ &= 7.7794\end{aligned}$$

Bei $df = 9$ Freiheitsgraden bestimmt man als kritisches Quantil $\chi^2_{0.95}(9) = 16.92$

Damit wird die Nullhypothese beibehalten, d. h. anhand der Daten lässt sich eine Verletzung der Verteilungsannahme $N(100, 15^2)$ nicht nachweisen

Anpassungstest für Verteilungsfunktion einer (quasi-)stetigen Zufallsvariable

Fall 2: Verteilungstyp bekannt

Häufig will man aber lediglich überprüfen, ob die Daten einer bestimmten Verteilung folgen (also z. B. normalverteilt sind), ohne dass man deren Parameter kennt

Zur Spezifizierung der Nullhypothese werden die Parameter der Verteilung aus den vorliegenden Daten geschätzt

Die Tatsache, dass bei der Festlegung der Nullhypothese Informationen aus den Daten benutzt werden, muss bei der Testentscheidung berücksichtigt werden

- Die Schätzung der Parameter aus den Stichprobenwerten führt zu einer zu optimistischen Bewertung der Anpassungsgüte
- Diese systematische Verzerrung wird durch eine Korrektur bei der Bestimmung der Anzahl der Freiheitsgrade kompensiert

Hypothesen

Wir betrachten eine Situation, in der die Verteilungsfunktion F durch die Parameter $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ vollständig bestimmt ist, d. h.

$$F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m),$$

wobei diese Parameter nicht bekannt sind

Die interessierenden Hypothesen sind

- H_0': Es gibt Parameter $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, sodass die $X_1, \ldots, X_n$ gemäß der Verteilungsfunktion $F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ verteilt sind
- H_1': Es gibt *keine* Parameter $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, sodass die $X_1, \ldots, X_n$ gemäß der Verteilungsfunktion $F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ verteilt sind

Stichprobenverteilung

Für diese Situation gilt

- Sind $\hat{\vartheta}_1, \ldots, \hat{\vartheta}_m$ die aus einer einfachen Stichprobe gewonnenen Maximum-Likelihood-Schätzungen für die unbekannten Parameter $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, so ist die aus der Verteilungsfunktion $F(\hat{\vartheta}_1, \ldots, \hat{\vartheta}_m)$ ermittelte Pearsonsche Teststatistik asymptotisch Chi-Quadrat-verteilt mit

$$df = r - m - 1$$

  Freiheitsgraden

Gegenüber der Situation mit bekannten Parametern verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade um die Anzahl m der geschätzten Parameter

Beispiel

Wir betrachten die IQ-Werte der oben beschriebenen Stichprobe von $n = 100$ Personen und die dargestellte Gruppierung dieser Werte

Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ soll nun überprüft werden, ob die Werte normalverteilt sind

Als Maximum-Likelihood-Schätzungen von Erwartungswert und Varianz der Normalverteilung ermittelt man

$$\bar{x} = 98.6404 \text{ und } s^2 = 293.8397 \text{ (bzw. } s = 17.1418)$$

Damit berechnet man die Wahrscheinlichkeiten der aus der Gruppierung resultierenden Multinomialverteilung

Beispiel

Als Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass eine Beobachtung in das Intervall $(-\infty, 80]$ fällt, erhalten wir

$$p_1 = \Phi\left(\frac{80 - 98.6404}{17.1418}\right) = 0.1384$$

Für die Wahrscheinlichkeit p_2, dass eine Beobachtung in das Intervall $(80, 85]$ fällt, berechnet man

$$\begin{aligned} p_2 &= \Phi\left(\frac{85 - 98.6404}{17.1418}\right) - \Phi\left(\frac{80 - 98.6404}{17.1418}\right) \\ &= 0.2131 - 0.1384 = 0.0747 \end{aligned}$$

Analog für die restlichen Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

Für die Teststatistik berechnet man dann

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(14 - 100 \cdot 0.1384)^2}{100 \cdot 0.1384} + \frac{(10 - 100 \cdot 0.0747)^2}{100 \cdot 0.0747} + \ldots + \frac{(9 - 100 \cdot 0.1064)^2}{100 \cdot 0.1064} \\ &= 0.0018 + 0.8595 + 0.2091 + 2.1887 + 0.1767 + 0.0424 \\ &\quad + 0.0024 + 0.8179 + 0.0649 + 0.2520 \\ &= 4.6153\end{aligned}$$

Bei $df = 9 - 2 = 7$ Freiheitsgraden bestimmt man als kritisches Quantil $\chi^2_{0.95}(7) = 14.07$

Auch in diesem Fall wird die Nullhypothese beibehalten, d. h. die Daten sprechen nicht dagegen, dass die beobachteten Werte normalverteilt sind

Ohne vorherige Poweranalyse (s. Beispielsammlung) bleibt jedoch unklar, welche anderen Verteilungen sich durch die Daten ebenso wenig zurückweisen lassen

Kolmogorow-Smirnow-Test

Einen alternativen Test der Abweichung einer empirischen Verteilung von einer theoretischen Verteilung, die vollständig spezifiziert ist (keine unbekannten Parameter), bietet der *Kolmogorow-Smirnow-Test*

- Die Teststatistik beruht auf der maximalen Abweichung der empirischen von der theoretischen Verteilung und folgt einer eigenen Verteilung (Kolmogorow-Smirnowsche Verteilung)

Der Test wird von vielen Statistikpaketen angeboten, zu beachten ist dabei aber, dass keine unbekannten Parameter der unterliegenden Verteilung geschätzt werden dürfen

- Für eine solche Schätzung würde die Irrtumswahrscheinlichkeit α erheblich vergrößert, sodass in einem solchen Fall der Chi-Quadrat-Anpassungstest verwendet werden sollte

Die Funktion `ks.test()`

Die Funktion wird auf die Daten aus dem betrachteten Beispiel der IQ-Werte für eine Stichprobe von $n = 100$ Personen angewendet

Für die im Vektor `x` enthaltenen Daten erhält man mit der Eingabe

```
ks.test(x, "pnorm", 100, 15)
```

die folgende Ausgabe

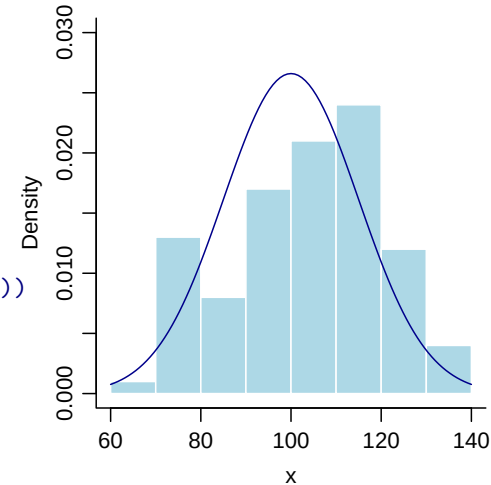
```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  x
D = 0.0862, p-value = 0.4478
alternative hypothesis: two-sided
```

Grafische Darstellungen

Histogramm

Ein Histogramm der empirischen Verteilung kann der Dichtefunktion der theoretisch angenommenen Verteilung gegenübergestellt werden

```
hist(x, prob = TRUE, ylim = c(0, 0.030))
curve(dnorm(x, mu, sigma), add = TRUE)
```



Quantil-Quantil-Grafiken (Q-Q-Plot)

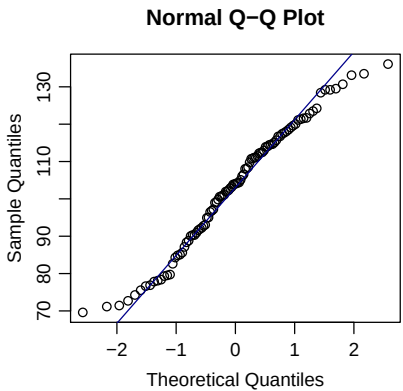
Mit der Funktion `qqplot()` werden die Quantile zweier beliebiger (auch empirischer) Verteilungen gegeneinander abgetragen

Im Folgenden betrachten wir für die IQ-Werte der oben beschriebenen Stichprobe eine Grafik, bei der die Quantile der empirischen Verteilung gegen die Quantile der Normalverteilung abgetragen werden

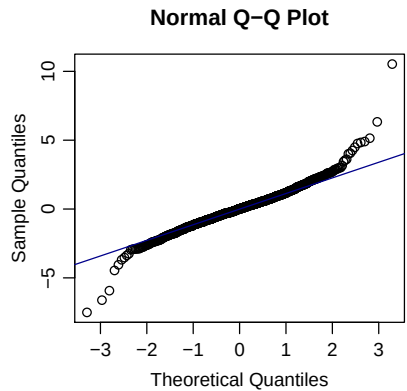
- Eine derartige Grafik kann mit der Funktion `qqnorm()` erstellt werden
- Die empirische Verteilung ist annähernd normal, wenn der resultierende Zusammenhang linear ist
- Mit der Funktion `qqline()` kann in diese Grafik eine Gerade eingezeichnet werden, die durch das erste und dritte Quartil der empirischen Verteilung bestimmt wird

Quantil-Quantil-Grafiken (Q-Q-Plot)

```
qqnorm(x)
qqline(x)
```




```
x <- rt(1000, 5)
qqnorm(x); qqline(x)
```



Grafische Darstellungen

Die besprochenen Grafiken können Anhaltspunkte für Abweichungen zwischen empirischer und theoretischer Verteilung liefern

- Der letzte Q-Q-Plot zeigt die systematischen Abweichungen der aus einer t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden gezogenen Stichprobenwerte von der Normalverteilung, insbesondere in den Randbereichen

Die Quantil-Quantil-Grafiken zeigen diese Abweichung im Allgemeinen deutlicher als die Gegenüberstellung eines Histogramms mit der entsprechenden Dichtefunktion