Vorlesung Statistik I

Florian Wickelmaier

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN



Wintersemester 2026/2027

Kombinatorik

Grundlagen

- Wie die Beispiele gezeigt haben, setzt die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten häufig die Bestimmung der Anzahl der bestehenden Möglichkeiten voraus
- Ein einfaches Abzählen ist wegen der oftmals großen Anzahl von Alternativen nicht möglich
- Im Rahmen der Kombinatorik werden grundlegende Überlegungen zur Ableitung von Regeln zur Berechnung der Anzahl von Möglichkeiten angestellt
- Im Folgenden werden die wichtigsten Regeln für einige häufig wiederkehrende Grundsituationen betrachtet

Einführendes Beispiel

Eine Person besitzt drei Hemden und zwei Krawatten. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten stehen dieser Person zur Verfügung?

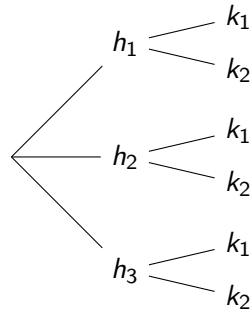
- Wir formalisieren das Problem durch die Mengen H der Hemden und K der Krawatten

$$H = \{h_1, h_2, h_3\}, \quad K = \{k_1, k_2\}$$

- Die Menge der Kombinationen ergibt sich dann als kartesisches Produkt

$$H \times K = \{(h_1, k_1), (h_1, k_2), (h_2, k_1), (h_2, k_2), (h_3, k_1), (h_3, k_2)\}$$

Baumdiagramm



Einführendes Beispiel

Für das Beispiel ergibt sich folgende Berechnungsvorschrift

$$|H \times K| = |H| \cdot |K| = 3 \cdot 2 = 6$$

Dieser Zusammenhang lässt sich allgemein beweisen, sodass für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_m$ gilt

$$|A_1 \times \ldots \times A_m| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_m|$$

Problemstellung

Wir betrachten die Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge, für die wir in zwei Aspekten unterscheiden

- Wiederholung der Elemente
  Die Selektion von Elementen (Objekten) wird als sukzessive Ziehung aus einer Urne (repräsentiert die betrachtete Menge) angesehen, die entweder *mit* oder *ohne* zwischenzeitliches Zurücklegen erfolgt (Selektion *mit* bzw. *ohne* Wiederholung)
- Reihenfolge der Elemente
  Das Ergebnis der Ziehung der Elemente wird entweder *mit* oder *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge der Ziehung betrachtet (*Permutationen* bzw. *Kombinationen*)

Problemstellung

Man spricht allgemein auch von einer k-Auswahl aus einer n-Menge mit oder ohne Wiederholung und mit oder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel

3-Menge

$$\{a, b, c\}$$

2-Auswahl ohne Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$(a, c)$$

Für das Beispiel ergibt sich folgendes Vierfelder-Schema

Problemstellung

Vierfelder-Schema: 2-Auswahl aus 3-Menge $\{a, b, c\}$

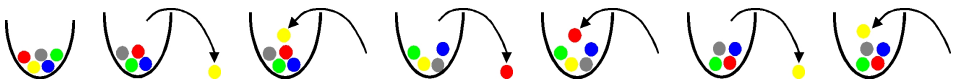
Wiederholung ($k = 2$)	Berücksichtigung der Reihenfolge	
	mit	ohne
mit	$(a,a), (a,b), (a,c),$ $(b,a), (b,b), (b,c),$ $(c,a), (c,b), (c,c)$	$[a,a], [a,b], [a,c],$ $[b,b], [b,c],$ $[c,c]$
ohne	$(a,b), (a,c),$ $(b,a), (b,c),$ $(c,a), (c,b)$	$\{a,b\}, \{a,c\},$ $\{b,c\}$

$[\ldots]$ bezeichnet Kollektion von Elementen

Permutationen mit Wiederholung

Grundproblem

Im Rahmen einer Ziehung mit Zurücklegen sollen die Positionen $1, \ldots, k$ mit Elementen der n-Menge besetzt werden



Ergebnis



Für jede Position gibt es n Auswahlmöglichkeiten, sodass sich insgesamt

$$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$$

Möglichkeiten ergeben

Permutationen mit Wiederholung

Beispiel: Fußballtoto (11er Wette)

- Bei jedem Spiel wird auf Unentschieden (0), Heimsieg (1) bzw. Auswärtssieg (2) getippt, es ist also $n = 3$
- Pro Spieltag werden $k = 11$ Begegnungen getippt
- Man hat also eine 11-Auswahl aus der 3-Menge $\{0, 1, 2\}$, für die insgesamt

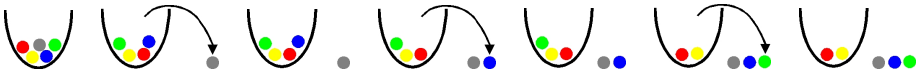
$$3^{11} = 177147$$

verschiedene Tipps existieren

Permutationen ohne Wiederholung

Grundproblem

Im Rahmen einer Ziehung ohne Zurücklegen sollen die Positionen $1, \ldots, k$ mit Elementen der n-Menge besetzt werden



Ergebnis



Für die einzelnen Positionen ergeben sich folgende Auswahlmöglichkeiten

Position	Möglichkeiten
1	n
2	$n-1$
$\vdots$	$\vdots$
k	$n-k+1$

Permutationen ohne Wiederholung

Allgemeine Berechnung der Anzahl der Permutationen $P_{n;k}$

$$\begin{aligned} P_{n;k} &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

mit $k \leq n$ und der *Fakultät*, definiert durch

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 1 \quad \text{für } m > 0 \text{ und } \quad 0! = 1$$

Permutationen ohne Wiederholung

Beispiel: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es beim Pferderennen den Einlauf der ersten 5 von 12 Pferden zu tippen?

- Mit $n = 12$ und $k = 5$ errechnet man

$$\begin{aligned} P_{12;5} &= \frac{12!}{(12-5)!} \\ &= \frac{479001600}{5040} \\ &= 95040 \end{aligned}$$

verschiedene Tipps

Permutationen ohne Wiederholung

Spezialfall $n = k$

Im Fall von $n = k$ beschreibt $P_{n;n}$ die Anzahl der verschiedenen Anordnungen (Reihenfolgen) von n Elementen

Eingesetzt in die allgemeine Formel ergibt sich

$$P_{n;n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

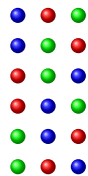
Dieses Ergebnis zeigt, dass die zunächst willkürlich anmutende Definition von $0! = 1$ sinnvoll ist

Permutationen ohne Wiederholung

Spezialfall $n = k$

Beispiele

- Es existieren $P_{3;3} = 3! = 6$ verschiedene Anordnungen von $n = 3$ Elementen



- Wieviele Möglichkeiten gibt es eine Fußballmannschaft von $n = 10$ Feldspielern aufzustellen?

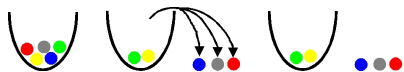
$$P_{10;10} = 10! = 3628800$$

Kombinationen ohne Wiederholung

Grundproblem

Bei der k-Auswahl ohne Zurücklegen komme es nicht auf die Reihenfolge der aus der n-Menge gezogenen Elemente an, sondern nur auf die resultierende Kombination von Elementen, die durch eine k-Menge beschrieben wird

Dieses Vorgehen kann man durch gleichzeitige Ziehung



Ergebnis



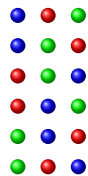
oder durch sukzessive Ziehung unter Abstrahierung von der erhaltenen Reihenfolge realisieren

Kombinationen ohne Wiederholung

Grundproblem

Bei einer sukzessiv durchgeführten 3-Auswahl ohne Zurücklegen sind z. B. folgende Resultate möglich

- Die 6 Permutationen



beziehen sich dabei auf eine einzige Kombination bestehend aus einer blauen, einer roten und einer grünen Kugel



Kombinationen ohne Wiederholung

Allgemeine Berechnung der Anzahl der Kombinationen $C_{n;k}$

- Aus einer Kombination von k Elemente lassen sich $k!$ Reihenfolgen erzeugen
- Es ergibt sich (für $k \leq n$) also

$$\begin{aligned} C_{n;k} &= \frac{P_{n;k}}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \end{aligned}$$

- Man schreibt auch

$$\binom{n}{k} = C_{n;k}$$

(sprich "n über k") und bezeichnet diesen Ausdruck als *Binomialkoeffizient*

Kombinationen ohne Wiederholung

Beispiel: Lotto 6 aus 49

- Es werden 6 Kugeln aus den von 1 bis 49 durchnummerierten Kugeln gezogen, wobei es für das Ergebnis unerheblich ist, wann eine Kugel gezogen wird
- Die Anzahl möglicher Ergebnisse berechnet man durch

$$\begin{aligned}\binom{49}{6} &= \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} \\ &= \frac{49!}{6!\,43!} \\ &= 13983816\end{aligned}$$

Kombinationen ohne Wiederholung

Beispiel: Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge

- Die Gesamtanzahl aller Teilmengen einer n-Menge (also die Kardinalität ihrer Potenzmenge) berechnet man mit 2^n
- Der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k}$$

  gibt nun die Anzahl der Teilmengen mit Kardinalität k an
- Für $n = 4$ ergibt sich z. B.

k	0	1	2	3	4
$\binom{4}{k}$	1	4	6	4	1

Kombinationen ohne Wiederholung

Beispiel: Paarbildungsgesetz

- In einer Gruppe von 50 Personen sollen sich alle per Handschlag begrüßen: Wie oft werden insgesamt Hände geschüttelt?
- Allgemein gilt für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

- Für das Beispiel mit $n = 50$ ergibt sich daher

$$\binom{50}{2} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$$

Kombinationen ohne Wiederholung

Weitere Anwendung

- Auf wieviele unterschiedliche Arten lassen sich n_R rote und n_G grüne Kugeln anordnen?
- Dieses Problem lässt sich auf das hier betrachtete Grundproblem reduzieren

  Für ein Beispiel mit $n_R = 3$, $n_G = 2$ und $n = n_R + n_G = 5$ betrachten wir ausschließlich die Positionen der roten Kugeln, z. B.



usw.

und repräsentieren diese durch $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ usw.

Kombinationen ohne Wiederholung

Weitere Anwendung

- Man bestimmt also die Anzahl aller k-Kombinationen mit $k = n_R$ der n-Menge der Positionen $\{1, \ldots, n\}$ durch

$$\binom{n}{n_R} = \frac{n!}{n_R!\, n_G!}$$

- Für das Beispiel mit $n_R = 3$, $n_G = 2$ erhält man dann

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\, 2!} = 10$$

Anordnungen

Kombinationen mit Wiederholung

Grundproblem

Wir betrachten eine Urne, die mit n Kugeln – durchnummeriert von 1 bis n – gefüllt ist und aus der mit Zurücklegen k Kugeln gezogen werden

Beispiel mit $n = k = 3$

Kombinationen	1	2	3		1	2	3	4	5
1 1 1	√ √ √			→	√	√	√	|	|
1 1 2	√ √	√		→	√	√	|	√	|
1 1 3	√ √		√	→	√	√	|	|	√
1 2 2	√	√ √		→	√	|	√	√	|
1 2 3	√	√	√	→	√	|	√	|	√
1 3 3	√		√ √	→	√	|	|	√	√
2 2 2		√ √ √		→	|	√	√	√	|
2 2 3		√ √	√	→	|	√	√	|	√
2 3 3		√	√ √	→	|	√	|	√	√
3 3 3			√ √ √	→	|	|	√	√	√

Kombinationen mit Wiederholung

Grundproblem

Das Beispiel zeigt, dass allgemein jedes Ergebnis durch eine Folge gekennzeichnet ist, die aus k Symbolen für die gezogenen Kugeln und $n-1$ Trennzeichen besteht, also eine Sequenzlänge von $n-1+k$ aufweist

Es gibt dann

$$\binom{n-1+k}{k}$$

Möglichkeiten der Anordnung der k Symbole für die Kugeln innerhalb einer Sequenz der Länge $n-1+k$

Kombinationen mit Wiederholung

Beispiel

Es werden drei (nichtunterscheidbare) Würfel geworfen

Wie viele mögliche Kombinationen von gewürfelten Augenzahlen gibt es?

- Die Grundmenge bildet hier die Ergebnismenge eines einzelnen Wurfs, d. h. die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Mit $n = 6$ und $k = 3$ ergeben sich dann

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{6-1+3}{3} = \binom{8}{3} = 56$$

mögliche Ausgänge

Zusammenfassung

Die für eine k-Auswahl aus einer n-Menge resultierende Anzahl möglicher Ausgänge wird für die vier betrachteten Grundprobleme im folgenden Schema zusammengefasst

Wiederholung	Permutation (geordnet)	Kombination (ungeordnet)
mit	n^k	$\binom{n-1+k}{k}$
ohne	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Berechnung kombinatorischer Größen mit R

Mit dem Funktionsaufruf `factorial(n)` wird die Fakultät $n!$ berechnet

```
factorial(6)
[1] 720
factorial(30)       # stabiler: exp(lfactorial(30))
[1] 2.652529e+32
```

Eine Berechnung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erfolgt über den Funktionsaufruf `choose(n, k)`

```
choose(6, 4)
[1] 15
choose(20, 10)      # exp(lchoose(20, 10))
[1] 184756
```

Berechnung kombinatorischer Größen mit R

Die Funktion `sample()` realisiert eine Zufallsauswahl (mit und ohne Zurücklegen), `sort()` abstrahiert von der Reihenfolge

- Zufallsauswahl von $k = 3$ Elementen aus einer n-Menge mit $n = 5$ ohne Zurücklegen ("default")

```
sample(1:5, 3)
[1] 3 4 1
sort(sample(1:5, 3))                    # ohne Reihenfolge
[1] 2 3 4
```

- Zufallsauswahl von $k = 3$ Elementen aus einer n-Menge mit $n = 5$ mit Zurücklegen

```
sample(1:5, 3, replace = TRUE)
[1] 4 3 4
sort(sample(1:5, 3, replace = TRUE))  # ohne Reihenfolge
[1] 2 2 5
```

Mit `replicate()` kann eine Ziehung mehrfach ausgeführt werden

Berechnung kombinatorischer Größen mit R

Wie oben dargestellt, erhält man bei einer Zufallsauswahl von $k = n$ Elementen aus einer n-Menge ohne Zurücklegen eine Permutation der Menge

```
sample(1:5, 5)
[1] 3 5 2 4 1
sample(1:5)      # default: k = n
[1] 5 1 3 4 2

x <- c("A", "N", "A", "G", "R", "A", "M", "M")
paste(x, collapse = "")
[1] "ANAGRAMM"
paste(sample(x), collapse = "")
[1] "NMAMARAG"
```

Berechnung kombinatorischer Größen mit R

Eine systematische Erzeugung von k-Auswahlen aus n-Mengen kann mit den Funktionen `permutations()` (geordnet) und `combinations()` (ungeordnet) aus dem Paket `gtools` realisiert werden

Permutationen

```
gtools::permutations(3, 3)  # alle Permutationen
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    1    3    2
[3,]    2    1    3
[4,]    2    3    1
[5,]    3    1    2
[6,]    3    2    1

sample(1:3)                 # Zufallsziehung
[1] 2 1 3
```

Berechnung kombinatorischer Größen mit R

Kombinationen

```
gtools::combinations(5, 3)  # alle Kombinationen
      [,1] [,2] [,3]
 [1,]    1    2    3
 [2,]    1    2    4
 [3,]    1    2    5
 [4,]    1    3    4
 [5,]    1    3    5
 [6,]    1    4    5
 [7,]    2    3    4
 [8,]    2    3    5
 [9,]    2    4    5
[10,]    3    4    5

sort(sample(1:5, 3))        # Zufallsziehung
[1] 1 3 5
```