Vorlesung Statistik B
Wahrscheinlichkeitstheorie

Florian Wickelmaier

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN



Wintersemester 2026/2027

Themen

Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

- Mengenlehre
- Wahrscheinlichkeitsraum
- Kombinatorik
- Stochastische Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit und klassische Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Diskrete und stetige Zufallsvariablen, Verteilungen und Kennwerte, Paare von Zufallsvariablen
- Zentraler Grenzwertsatz
- Testverteilungen

Grundlagen der Mengenlehre

Georg Cantor (1845-1918)

> *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmtem, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen*

Für unsere Zwecke reicht es aus, wenn für Mengen die Eigenschaften *Element sein* und *Gleichheit von Elementen* eindeutig bestimmt sind

Für beliebige Objekte x lässt sich entscheiden, ob gilt

- x ist ein Element der Menge M (kurz $x \in M$) oder
- x ist kein Element der Menge M (kurz $x \notin M$)

Für alle $x, y \in M$ ist eindeutig bestimmt, ob x und y identisch sind, d. h. das gleiche Element bezeichnen ($x = y$) oder nicht ($x \neq y$)

Grundlagen der Mengenlehre

Mengen können in verschiedener Weise angegeben werden

- durch Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern
  Beispiel
  $$M = \{a, b, c, d, e\}$$

- durch Angabe ihrer definierenden Eigenschaft
  Beispiel
  $$M = \{x \mid x \text{ ist eine gerade ganze Zahl}\}$$

Die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente ist unerheblich, z. B. gilt

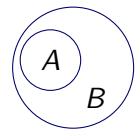
$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

Mengenrelationen und -operationen

Für Mengen A, B gilt

- Teilmengenrelation

$$A \subseteq B \text{ gdw. für alle } a \text{ gilt: } a \in A \text{ impliziert } a \in B$$

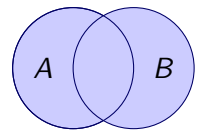


- Gleichheit von Mengen

$$A = B \text{ gdw. } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

- Mengenvereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



Mengenrelationen und -operationen

Für Mengen A, B gilt

- Mengendurchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

- Mengendifferenz

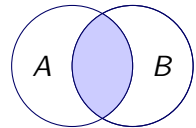
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

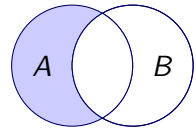
- Symmetrische Mengendifferenz

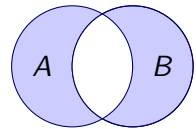
$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

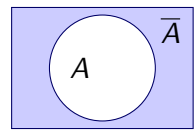
- Komplement einer Teilmenge $A \subseteq M$ bezüglich M

$$\overline{A} := M \setminus A$$









Eigenschaften der Mengenrelationen und -operationen

Für Mengen A, B, C gilt

- Idempotenz

$$A \cup A = A, \ A \cap A = A$$

- Kommutativität

$$A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A$$

- Assoziativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Distributivität

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Eigenschaften der Mengenrelationen und -operationen

Für Mengen A, B gilt

- Eigenschaften der leeren Menge

$$\emptyset \subseteq A, \quad (A \subseteq \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)$$

- Identität

$$A \subseteq B \text{ gdw. } A \cap B = A \text{ gdw. } A \cup B = B$$

- Komplementarität für $A \subseteq M$ und $\overline{A} = M \setminus A$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- DeMorgansche Regeln

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Mengensysteme

Eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer gegebenen Menge M bezeichnet man als *Mengensystem* über der Menge M, oder auch als *Familie von Teilmengen* der Menge M

Beispiele

- Für $M = \{a, b, c, d, e\}$ kann man beispielsweise folgende Mengensysteme betrachten

$$\mathcal{A}_1 = \emptyset$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset\}$$
$$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, M\}$$
$$\mathcal{A}_4 = \{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}\}$$
$$\mathcal{A}_5 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d, e\}, M\}$$

Mengensysteme

Oft stellt man strukturelle Anforderungen an die betrachteten Mengensysteme, z. B. dass sie abgeschlossen sind bezüglich

- der Bildung des Mengendurchschnitts
- der Bildung der Mengenvereinigung
- der Komplementbildung

In der Mathematik wird eine Struktur, die derartige Berechnungen erlaubt, als Algebra bezeichnet

Mengenalgebra

Eine Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer endlichen Menge M ist ein Mengensystem über M mit folgenden Eigenschaften

- $M \in \mathcal{A}$
- Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch das Komplement $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Ist $A, B \in \mathcal{A}$, so liegt auch

$$A \cup B$$

in $\mathcal{A}$

Disjunkte Mengen

Zwei Mengen A, B heißen *disjunkt* (elementfremd), wenn gilt

$$A \cap B = \emptyset$$

Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt *paarweise disjunkt*, wenn für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cap B = \emptyset$

Beispiel

- Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ mit

  $$A = \{a, b\}, B = \{b, c\}, C = \{a, c\}$$

  ist disjunkt, d. h. $A \cap B \cap C = \emptyset$, aber *nicht* paarweise disjunkt

Tupel

Kommt es auf die Reihenfolge von n Elementen an, so verwendet man den Begriff des *n-Tupels* und schreibt

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Die Gleichheit

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$$

von zwei Tupeln gilt genau dann, wenn $n = m$ und $x_i = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Bei einem n-Tupel ist also (im Gegensatz zu einer n-elementigen Menge) die Reihenfolge der Elemente festgelegt

Kartesisches Produkt

Für zwei Mengen A, X ist das *kartesische Produkt* $A \times X$ definiert als die Menge aller geordneten Paare (a, x) mit $a \in A$ und $x \in X$, also

$$A \times X = \{(a, x) \mid a \in A,\, x \in X\}$$

Entsprechend ist das n-fache kartesische Produkt der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ definiert durch

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Statt des n-fachen Produkts $A \times A \times \ldots \times A$ schreibt man auch A^n

Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Literatur

Neben den bereits genannten Lehrbüchern eignen sich hier besonders

- Heller, J. (2012). *Experimentelle Psychologie*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag. (Kapitel 4)
- Brémaud, P. (1988). *An Introduction to probabilistic modeling*. New York: Springer.
- Chung, K. L. (1975). *Elementary probability theory with stochastic processes*. New York: Springer.
- Goldberg, S. (1969). *Die Wahrscheinlichkeit* (2. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.
- Georgii, H.-O. (2009). Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (4. Aufl.). Berlin: Walter de Gruyter.

Grundbegriffe

In der Psychologie, wie auch in anderen Naturwissenschaften, sind die empirischen Beobachtungen mit Unsicherheit behaftet

- Die in psychologischen Untersuchungen gezeigten Verhaltensweisen sind zufällig, d. h. deren Auftreten kann nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden

Zur quantitativen Charakterisierung dieses, im Rahmen eines Zufallsexperiments zu beobachtenden, Zufallsgeschehens wird in der Wissenschaft der Begriff der Wahrscheinlichkeit verwendet

Die Grundlage der wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung eines Zufallsexperiments bildet der *Wahrscheinlichkeitsraum*

Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Experiment, dessen Ausgang nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann, dessen grundsätzlich mögliche Ausgänge aber bekannt sind, wird als *Zufallsexperiment* bezeichnet

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ besteht aus

- einer Ergebnismenge Ω, d. h. der Menge der möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Ereignissen
- einem *Wahrscheinlichkeitsmaß* P

Ergebnismenge

Eine Menge Ω heißt die *Ergebnismenge* eines Zufallsexperiments, wenn gilt

- Jedes Element $\omega \in \Omega$, das *Ergebnis* genannt wird, bezeichnet einen möglichen Ausgang des Experiments
- Jedem Ausgang des Experiments entspricht genau ein Element $\omega \in \Omega$, also genau ein Ergebnis

Die Wahrscheinlichkeitstheorie legt damit nur formale Randbedingungen fest, die eine Menge Ω erfüllen muss, um als Ergebnismenge eines Zufallsexperiments tauglich zu sein

Die konkrete Wahl einer Ergebnismenge richtet sich nach der mit der Durchführung des Zufallsexperiments verbundenen Fragestellung

Ergebnismenge

Beispiel

- In einem Detektionsexperiment wird einer Versuchsperson ein schwaches akustisches Signal dargeboten, das in ein Störgeräusch eingebettet ist (s) bzw. das Störgeräusch ohne ein Signal (n)
- Die Versuchsperson soll entscheiden, ob im dargebotenen Reiz ein Signal enthalten war ($+$) oder nicht ($-$)
- Die Antwort der Versuchsperson ist richtig (r), wenn sie bei Darbietung von Reiz s mit $+$ antwortet bzw. bei Reiz n mit $-$ und falsch (f) sonst

Ergebnismenge

Beispiel

- Ist man daran interessiert, in welchem Maße die Versuchsperson die Reizsituationen richtig identifiziert, so kann man dem Zufallsexperiment folgende Ergebnismenge zugrunde legen

$$\Omega_1 = \{r, f\}$$

- Will man differenziertere Aussagen machen, wie etwa die Theorie der Signalentdeckung, so empfiehlt sich die Wahl von

$$\Omega_2 = \{s, n\} \times \{+, -\} = \{(s, +), (s, -), (n, +), (n, -)\}$$

Ergebnismenge

Beispiel

- Sei P eine Menge von Personen, denen eine Sammlung von 10 Testaufgaben $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ zur Bearbeitung vorgelegt werden, wobei jeweils beobachtet wird, ob die Aufgaben gelöst $(+)$ bzw. nicht gelöst $(-)$ werden
- Als Ergebnismenge dieses Zufallsexperiments eignet sich

$$\Omega = P \times \{+, -\}^{10}$$

- Ein Element aus Ω ist für $p \in P$ beispielsweise

$$\omega = (p, +, +, -, +, -, -, -, +, -, +)$$

σ-Algebra der Ereignisse

Ereignisse sind formal Teilmengen der Ergebnismenge Ω eines Zufallsexperiments

Diese formale Definition bietet die Möglichkeit einer äußerst flexiblen theoretischen Beschreibung des zu beobachtenden Zufallsgeschehens

Ereignisse sind *nicht* direkt beobachtbar, da sie theoretische Objekte, nämlich Mengen, sind

Um den Bezug zu den beobachteten Ausgängen eines Zufallsexperiments herzustellen, kann man aber definieren

- Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ *tritt ein* genau dann, wenn im Zufallsexperiment ein Ergebnis ω beobachtet wird, das in A enthalten ist, für das also $\omega \in A$ gilt

σ-Algebra der Ereignisse

Besondere Ereignisse sind die Ergebnismenge Ω selbst und die leere Menge $\emptyset$

- Nach der obigen Festlegung tritt das Ereignis Ω bei Durchführung des Zufallsexperiments stets ein und wird daher als das *sichere Ereignis* bezeichnet
- Demgegenüber tritt das Ereignis $\emptyset$ nie ein und heißt daher auch das *unmögliche Ereignis*

Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$, das nur ein Ergebnis enthält, heißt *Elementarereignis*, d. h. es gilt $A = \{\omega\}$ für ein Ergebnis $\omega \in \Omega$

σ-Algebra der Ereignisse

Sind zwei Teilmengen $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, so möchte man auch darüber sprechen können, dass beide Ereignisse A und B gleichzeitig eintreten bzw. dass das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt

- Die Menge der betrachteten Ereignisse sollte also auch die Teilmengen $A \cap B$ und $A \cup B$ enthalten

Ebenso sollte es auch möglich sein, davon zu sprechen, dass das Ereignis A nicht eintritt, d. h. dass $\overline{A} = \Omega \setminus A$ ein Ereignis ist

Die folgende Definition führt den entsprechenden, zur Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie erforderlichen Begriff der σ-Algebra ein

σ-Algebra der Ereignisse

Eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Ereignissen ist eine Familie von Teilmengen von Ω mit folgenden Eigenschaften

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch das mengentheoretische Komplement $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- Für alle $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt auch

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots$$

in $\mathcal{A}$

σ-Algebra der Ereignisse: Beispiele

Die Mengenfamilien

$$\{\emptyset, \Omega\}$$

und

$$\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$$

mit $A \subseteq \Omega$ bilden ebenso σ-Algebren über einer Ergebnismenge Ω wie die Menge

$$\mathcal{P}(\Omega)$$

aller Teilmengen von Ω (die Potenzmenge von Ω)

Wahrscheinlichkeitsmaß

Die in der nachfolgenden Definition wiedergegebene axiomatische Einführung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit geht zurück auf Kolmogorow (1933)

Auch hier wird lediglich definiert, welche Eigenschaften eine Zahlenzuordnung zu Ereignissen haben muss, um sie als Wahrscheinlichkeit bezeichnen zu können

Aufgrund der geforderten Eigenschaften wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auch ein *normiertes, nichtnegatives, vollständig additives (abzählbar additives)* Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ genannt

Wahrscheinlichkeitsmaß

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß eine Abbildung

$$P\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R},$$

für die gilt

- $P(\Omega) = 1$
- Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $P(A) \geq 0$
- Für alle paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ aus $\mathcal{A}$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_i) + \ldots$$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Bei einer endlichen Ergebnismenge Ω genügt es für $P\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ zu fordern

- $P(\Omega) = 1$
- Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $P(A) \geq 0$
- Für alle disjunkten Mengen A, B aus $\mathcal{A}$ gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Wahrscheinlichkeitsraum: Zusammenfassung

Die Beschreibung eines Zufallsexperiments erfolgt auf der Grundlage eines Wahrscheinlichkeitsraums $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$, bestehend aus

- einer Ergebnismenge Ω, d. h. der Menge der möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Ereignissen
- einem *Wahrscheinlichkeitsmaß* P

Die Wahrscheinlichkeitstheorie legt dabei nur die formalen Eigenschaften fest, die ein Wahrscheinlichkeitsraum erfüllen muss

- Die konkrete Definition der Ergebnismenge, der σ-Algebra und des Wahrscheinlichkeitsmaßes erfolgt auf der Grundlage des durchzuführenden Zufallsexperiments und der damit verbundenen Fragestellungen

Folgerungen aus den Axiomen

Für jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Beweis

- Wegen $A \cup \overline{A} = \Omega$ und $A \cap \overline{A} = \emptyset$ folgt

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

Insbesondere gilt daher

$$P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0$$

Folgerungen aus den Axiomen

Für Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$A \subseteq B \text{ impliziert } P(A) \leq P(B)$$

Beweis

- Wegen $A \subseteq B$ gilt $A \cap B = A$ und es folgt

$$B = \Omega \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

- Da A und $\overline{A} \cap B$ disjunkt sind, gilt

$$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B),$$

woraus mit $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$ die Behauptung folgt

Folgerungen aus den Axiomen

Für Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(B \setminus A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$$

Beweis

- Wegen

$$B = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$$

erhält man

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A),$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt

Folgerungen aus den Axiomen

Für beliebige Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Beweis

- Aus der paarweise disjunkten Zerlegung

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

und der soeben gezeigten Beziehung folgt

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Laplace-Experiment

Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit folgenden Eigenschaften

- Die (nichtleere) Ergebnismenge Ω ist endlich, d. h. es gilt

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$$

- Die Elementarereignisse $\{\omega_i\}$, für $i = 1, 2, \ldots, m$ besitzen alle dieselbe Wahrscheinlichkeit

$$P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_m\}) = p$$

Ein Zufallsexperiment mit diesen beiden Eigenschaften heißt *Laplace-Experiment*

Laplace-Experiment

Aus der disjunkten Zerlegung

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_m\}$$

folgt

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + \ldots + P(\{\omega_m\}) = m \cdot p$$

Daher gilt

$$p = \frac{1}{m}$$

Für ein Ereignis $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}\}$, das aus r verschiedenen Ergebnissen besteht, ergibt sich dann

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \ldots + P(\{\omega_{i_r}\}) = r \cdot p = \frac{r}{m}$$

Wahrscheinlichkeitsraum

Der Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ eines Laplace-Experiments ergibt sich aus folgenden Festlegungen

- Als σ-Algebra wählt man $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, die Potenzmenge von Ω
- Als Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert man für $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der ingesamt möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

  wobei $|M|$ die Anzahl der Elemente einer Teilmenge $M \subseteq \Omega$ bezeichnet (auch Kardinalität genannt)

Die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes sind für P leicht nachzuweisen

Wahrscheinlichkeitsmaß

Für die obige Definition von P gilt mit $|\Omega| = m \neq 0$

- Normiertheit: Es ist
$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

- Nichtnegativität: Für alle Ereignisse $A \in \mathcal{A}$ ist wegen $|A| \geq 0$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 0$$

- Additivität: Für disjunkte Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$ und somit
$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

Beispiel: einmaliger Münzwurf

Das Zufallsexperiment bestehe im einmaligen Werfen einer fairen Münze

- Ergebnismenge

$$\Omega_M = \{K, Z\}$$

  mit K für Kopf und Z für Zahl

- σ-Algebra

$$\mathcal{A}_M = \mathcal{P}(\Omega_M)$$

- Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_M(\{K\}) = P_M(\{Z\}) = \frac{1}{2}$$

Beispiel: einmaliges Werfen eines Würfels

Das Zufallsexperiment bestehe im einmaligen Werfen eines fairen Würfels

- Ergebnismenge

$$\Omega_W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  wobei 1 das Ergebnis repräsentiert, bei dem das Punktmuster mit einem Punkt oben liegt, usw.

- σ-Algebra

$$\mathcal{A}_W = \mathcal{P}(\Omega_W)$$

- Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_W(\{1\}) = \ldots = P_W(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Beispiel: einmaliges Werfen eines Würfels

Wir betrachten als Ereignis A "eine gerade Zahl zu würfeln", dann ist

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{und} \quad P_W(A) = \frac{|A|}{|\Omega_W|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Für das Ereignis B "eine Zahl kleiner gleich 3 zu würfeln" hat man

$$B = \{1, 2, 3\} \quad \text{und} \quad P_W(B) = \frac{|B|}{|\Omega_W|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass A oder B (bzw. A und B) eintritt?

Beispiel: zweimaliger Münzwurf

Das Zufallsexperiment bestehe im zweimaligen, unabhängig nacheinander durchgeführten Werfen einer fairen Münze

- Ergebnismenge

$$\Omega_{M'} = \{K, Z\} \times \{K, Z\} = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

  mit K für Kopf und Z für Zahl

- σ-Algebra

$$\mathcal{A}_{M'} = \mathcal{P}(\Omega_{M'})$$

- Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_{M'}(\{(K, K)\}) = P_{M'}(\{(K, Z)\}) = \\ = P_{M'}(\{(Z, K)\}) = P_{M'}(\{(Z, Z)\}) = \frac{1}{4}$$

Beispiel: zweimaliger Münzwurf

Wir betrachten das Ereignis A "mindestens einmal Zahl zu werfen", dann ist

$$A = \{(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\} \quad \text{und} \quad P_{M'}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_{M'}|} = \frac{3}{4}$$

Für das Ereignis B "zweimal dasselbe zu werfen" hat man

$$B = \{(K,K),(Z,Z)\} \quad \text{und} \quad P_{M'}(B) = \frac{|B|}{|\Omega_{M'}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass A oder B (bzw. A und B) eintritt?

Beispiel: zweimaliges Werfen eines Würfels

Das Zufallsexperiment bestehe im zweimaligen, unabhängig nacheinander durchgeführten Werfen eines fairen Würfels, wobei die resultierende Augensumme als Ergebnis betrachtet werde

- Ergebnismenge
$$\Omega_{W'} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- σ-Algebra
$$\mathcal{A}_{W'} = \mathcal{P}(\Omega_{W'})$$

Ist das vorliegende Zufallsexperiment ein Laplace-Experiment?

Leiten Sie das Wahrscheinlichkeitsmaß für das vorliegende Zufallsexperiment aus dem Laplace-Experiment über der Ergebnismenge $\Omega_W \times \Omega_W$ ab

Beispiel: zweimaliges Werfen eines Würfels

Das Zufallsexperiment des zweimaligen Würfelns kann bezüglich der Ergebnismenge

$$\Omega_W \times \Omega_W = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

als Laplace-Experiment betrachtet werden

Für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses $\{(j,k)\}$ mit $j,k \in \Omega_W$ gilt dann

$$P(\{(j,k)\}) = \frac{1}{36}$$

Daraus ergeben sich für die Betrachtung der Augensumme die nachfolgend spezifizierten Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: zweimaliges Werfen eines Würfels

Ergebnis $\omega_i \in \Omega_{W'}$	Ereignis bzgl. $\Omega_W \times \Omega_W$	$P(\{\omega_i\})$
2	$\{(1,1)\}$	$\frac{1}{36}$
3	$\{(1,2),(2,1)\}$	$\frac{2}{36}$
4	$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$\frac{3}{36}$
5	$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$	$\frac{4}{36}$
6	$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$	$\frac{5}{36}$
7	$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$	$\frac{6}{36}$
8	$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$	$\frac{5}{36}$
9	$\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$	$\frac{4}{36}$
10	$\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$	$\frac{3}{36}$
11	$\{(5,6),(6,5)\}$	$\frac{2}{36}$
12	$\{(6,6)\}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel: zweimaliges Werfen eines Würfels

